

Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1 – Faire les exercices 5 et 6 de la feuille 5.

Exercice 2 – Montrer que toute forme sesquilinéaire réelle est bilinéaire.

Exercice 3 –

1. Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique suivante sur $M_n(\mathbb{R})$: $A \mapsto \text{tr}(A^2)$.
2. Même question pour $A \mapsto \text{tr}({}^tAA)$ et pour $A \mapsto \text{tr}(A)^2$.
3. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit q la forme quadratique sur $M_2(k)$ donnée par $q(A) = \det(A)$. Donner une base hyperbolique de $M_2(k)$ pour q et exhiber un élément non diagonalisable de $O(q)$.

Exercice 4 – Soit k un corps de caractéristique différente de 2, soit E un espace vectoriel de dimension finie, non réduit à 0 et soit H un hyperplan de E . Soient de plus q une forme quadratique non dégénérée sur E et u un élément de $O(q)$ vérifiant $u|_H = \text{id}_H$.

1. Si $q|_H$ est non dégénérée, montrer que u est soit l'identité, soit la réflexion orthogonale d'hyperplan H .
2. Si $q|_H$ est dégénérée, montrer que u est l'identité.

Exercice 5 – Soient $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$q(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

de forme bilinéaire b . Un sous-espace F de E est dit *elliptique* si $q|_F$ est définie négative, *hyperbolique* si $q|_F$ est de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$ et *parabolique* si F est isotrope.

1. Soit F un sous-espace de dimension au moins 2 tel qu'il existe $x \in F$ avec $q(x) > 0$. Montrer que F est hyperbolique.
2. Soit F un sous-espace elliptique de dimension au plus $n - 1$. Montrer que F^\perp est hyperbolique.
3. Soit F un espace parabolique. Montrer que $q|_F$ est de rang $\dim F - 1$.

Exercice 6 – Soit k un corps. On définit son niveau $s(k) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$s(k) = \inf\{n \geq 1 \mid \exists(x_1, \dots, x_n) \in k^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1\},$$

avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide est 1.

1. Montrer que deux corps isomorphes ont même niveau. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que le niveau d'un corps fini est égal à 1 ou 2.
3. Montrer l'égalité $s(k) = s(k(X))$.

On suppose désormais que k de caractéristique différente de 2. Pour $n \geq 1$, on considère la forme quadratique

$$q_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

4. Montrer que q_n admet un vecteur isotrope si et seulement si on a $s(k) \leq n - 1$.
5. Supposons $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout vecteur non nul $x = (x_1, \dots, x_n)$, il existe une matrice T_x de première ligne (x_1, \dots, x_n) et vérifiant

$${}^t T_x T_x = T_x {}^t T_x = q_n(x_1, \dots, x_n) I_n.$$

6. En déduire que l'ensemble des sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments de k est un groupe multiplicatif.
7. Montrer que le niveau d'un corps est soit infini, soit une puissance de 2.