Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1 –Soit k un orps de caractéristique différente de 2. Soit (P, q) un k-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme quadratique. On suppose qu'il y a dans P au moins 3 droites isotropes. Montrer que le plan P est totalement isotrope.

Exercice 2 –Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Soient q et q' deux formes quadratiques sur E vérifiant $q^{-1}(0) = (q')^{-1}(0)$.

1. Supposons k algébriquement clos. Montrer qu'il existe $a \in k^\times$ tel que l'on ait $q' = aq$.
2. Donner un contre-exemple pour $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 – Soit p un nombre premier impair et $q = p^r$ une puissance d'un tel nombre premier, avec $r \geq 1$. On rappelle que $\mathbb{F}_{q^2}$ est muni de l'involution de Frobenius $x \mapsto x^q$ (unique involution non triviale de $\mathbb{F}_{q^2}$; son corps des invariants est $\mathbb{F}_q$). On pose $E_n = \mathbb{F}_{q^2}^n$.

1. Montrer qu'il y a sur (E_n, σ) une unique classe d'équivalence de formes hermitiennes. Montrer qu'une telle forme admet dans une base convenable la matrice identité.
2. Soient z_n, y_n le nombre respectif de vecteurs non triviaux de E_n de norme 0 et 1. Par récurrence, montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$,
$$z_n = (q^n - (-1)^n)(q^{n-1} + (-1)^n) \text{ et } y_n = q^{n-1}(q^n - (-1)^n).$$
3. Calculer l'ordre de $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$.
4. En déduire l'ordre de $SU_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

Exercice 4 – Soient k un corps et $n \geq 1$ un entier. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{2n}(k)$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Pf}(A)$ en les variables a_{ij} pour $1 \leq i < j \leq 2n$ tel que $\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2$ et de coefficient 1 pour le terme $a_{12}a_{34}\ldots a_{2n-1,2n}$. Ce polynôme est appelé le *Pfaffien* de A.
2. Montrer que si P est une matrice inversible, alors
$$\mathrm{Pf}({}^tPAP) = \det(P)\mathrm{Pf}(A).$$
3. En déduire que $\mathrm{Sp}_n(k)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_{2n}(k)$.

Exercice 5 –

1. Rappeler l'ordre de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

2. À partir de l'action naturelle de S_6 sur $\mathbb{F}_2^6$, construire une action de S_6 sur un sous-espace E de dimension 5. En déduire une action de S_6 sur un quotient de dimension 4 de V muni d'une forme bilinéaire alternée.

3. Conclure que S_6 est isomorphe à $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 6 – Si k est un corps de caractéristique différente de 2, soit q une forme quadratique non dégenerée sur k^2 et soit $u \in \mathrm{SO}(q) - \{\mathrm{Id}\}$. montrer que u n'admet pas la valeur propre 1.

Exercice 7 –**(Groupe des commutateurs** $\Omega(q)$ **de** $\mathrm{O}(q)$**)** Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $n \geq 2$. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur k^n. On définit $\Omega(q)$ et $\mathrm{S}\Omega(q)$ comme étant les sous-groupes dérivés respectifs de $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{SO}(q)$.

1. Prouver que $\Omega(q)$ est engendré par les produits $s(wsw^{-1})$ de deux réflexions conjuguées.

2. Prouver que $\Omega(q)$ est engendré par les commmutateurs $sts^{-1}t^{-1} = (st)^2$ où s et t sont des réflexions.

3. Montrer que $\Omega(q) \subset \mathrm{SO}(q)$ et que si $n \geq 3$ alors $\mathrm{S}\Omega(q) = \Omega(q)$.

4. Montrer que si $u \in O(q)$ alors $u^2 \in \Omega(q)$.

5. On suppose dans cette question que $k \neq \mathbb{F}_3$ et que $P \subset k^n$ est un plan non isotrope. Prouver qu'il existe $u \in \mathrm{O}(q)$ tel que $u_{|P^\perp} = \mathrm{Id}$ et $u^2 \neq \mathrm{Id}$.

6. Conclure que si $k \neq \mathbb{F}_3$ et si $n \geq 3$ alors le centre de $\Omega(q)$ est $\{\pm 1\} \cap \Omega(q)$.

7. Si $k = \mathbb{F}_3$ et $n \geq 4$ montrer que toute droite non isotrope est intersection de deux plans anisotropes et conclure comme précédemment.

8. Montrer que le résultat reste encore vrai si $k = \mathbb{F}_3$ et $n = 3$.