Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1 –Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$. Soit b la forme sur $(\mathbb{F}_{q^2})^3 \times (\mathbb{F}_{q^2})^3$ définie par $b(u,v) = u_1 v_3^q + u_2 v_2^q + u_3 v_1^q$

1. Déterminer l'ensemble Δ des droites isotropes de b. Quel est le cardinal de Δ?

2. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$. On définit aussi les lments $t_{\alpha,\beta}$ et $h_{\gamma,\delta}$ de $PU_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ correspondant aux respectivement aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta^q & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-q} \end{pmatrix}$$

   avec les conditions $\delta^{1+q} = 1$, $\gamma \neq 0$, $\alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0$. Déterminer le stabilisateur de ke_1 dans $PU_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ et montrer que $T := \{t_{\alpha,\beta} \mid \alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0\}$ en est un sous-groupe normal.

3. Montrer que l'action de $PU_3(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ sur Δ est 2-transitive.

Exercice 2 – Soit $n \geq 1$ et $\mathbb{C}^n$ le $\mathbb{C}$-ev muni du produit scalaire hermitien usuel $(\ |\ )$. On note $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes. Soit enfin G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En considérant $(x|y)_G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} (gx|gy)$, montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $U_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3 – Soit p un nombre premier impair et $q = p^r$ une puissance d'un tel nombre premier, avec $r \geq 1$. On rappelle que $\mathbb{F}_{q^2}$ est muni de l'involution de Frobenius $x \mapsto x^q$ (unique involution non triviale de $\mathbb{F}_{q^2}$; son corps des invariants est $\mathbb{F}_q$). On pose $E_n = \mathbb{F}_{q^2}^n$.

1. Montrer qu'il y a sur (E_n, σ) une unique classe d'équivalence de formes hermitiennes. Montrer qu'une telle forme admet dans une base convenable la matrice identité.

2. Soient z_n, y_n le nombre respectif de vecteurs non triviaux de E_n de norme 0 et 1. Par récurrence, montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$z_n = (q^n - (-1)^n)(q^{n-1} + (-1)^n) \quad \text{et} \quad y_n = q^{n-1}(q^n - (-1)^n).$$

3. Calculer l'ordre de $U_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

4. En déduire l'ordre de $SU_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

Exercice 4 – Soit $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions de Hamilton. Un élément $z \in \mathbb{H}$ est dit *pur* s'il s'écrit sous la forme $z = bi + cj + dk$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $z \in \mathbb{H}$ est pur si et seulement si $z^2 \in \mathbb{R}^-$.

2. Montrer que tout élément de $\mathbb{H}$ est produit de deux quaternions purs.

3. Montrer que tout automorphisme d'anneaux de $\mathbb{H}$ est de la forme $x \mapsto qxq^{-1}$ pour un certain $q \in \mathbb{H}$ de norme 1.

4. Vérifier que la transposée sur $M_2(\mathbb{H})$ ne conserve pas le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{H})$.

Exercice 5 – (Quaternions généralisés) Soit k un corps de caractéristique différente de 2 et soient $\alpha, \beta \in k^\times$. On définit une k-algèbre de dimension 4, $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ (l'*algèbre des quaternions généralisés*) munie d'une base $(1, i, j, k)$ telle que

$$\text{1 est le neutre pour la multiplication, } \; i^2 = \alpha, \; j^2 = \beta, \; ij = -ji = k.$$

On définit comme on pense une conjugaison et la norme réduite N.

1. Montrer que si k est algébriquement clos alors $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ est isomorphe à $M_2(k)$.

2. Montrer que $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre à division si et seulement si N est une forme anisotrope sur le k-ev $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$.

3. Montrer que si $k = \mathbb{F}_q$ alors $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre.

4. Soient $\alpha', \beta' \in k^\times$. Montrer que les k-algèbres $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ et $\mathbb{H}_{\alpha',\beta'}$ sont isomorphes si et seulement si les normes N et N' associées sont des formes quadratiques isométriques.

Exercice 6 – (Théorème de Lagrange) Soit A un anneau unitaire et $\mathbb{H}(A)$ la A-algèbre des éléments $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in A$ telle que 1 est neutre pour la multiplication et avec les relations que l'on croit :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \; ij = -ji = k, \; jk = -kj = i, \; ki = -ik = j.$$

On construit comme précédemment, la conjuguaison et la norme réduite N.

1. Montrer que N est à valeurs dans A et que N est multiplicative.

2. On définit les *quaternions d'Hurwitz* par

$$H := \left\{ a + bi + ck + dk \in \mathbb{H}(\mathbb{Q}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}^4 \right) \right\}.$$

   Montrer que H est un sous-anneau de $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ contenant $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et vérifiant $N(z) = 1$ si et seulement si z est inversible dans H.

3. Montrer que tout idéal à droite (respectivement à gauche) est principal.

4. Montrer que, pour tout nombre premier p, il existe $z \in H$ tel que $N(z) = p$.

5. Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés.