Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 8 Corrigé partiel

Exercice 1 – Soit $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions de Hamilton. Un élément $z \in \mathbb{H}$ est dit *pur* s'il s'écrit sous la forme $z = bi + cj + dk$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que $z \in \mathbb{H}$ est pur si et seulement si $z^2 \in \mathbb{R}^-$.* C'est un simple calcul...

2. *Montrer que tout élément de $\mathbb{H}$ est produit de deux quaternions purs.* Pareil.

3. *Montrer que tout automorphisme d'anneaux de $\mathbb{H}$ est de la forme $x \mapsto qxq^{-1}$ pour un certain $q \in \mathbb{H}$ de norme* 1. Détaillons la correction de cette question : soit u un automorphisme de $\mathbb{H}$. Il conserve le centre donc est l'identité sur $\mathbb{R}$. De même on vérifie que u laisse l'ensemble des quaternions purs P stable et si q est dans P alors $N(u(q)) = N(q) = -q^2$ donc $u_{|P}$ est dans $O(N_{|P} = O_3(\mathbb{R})$. Soit i, j, k est une base orthonormée de P pour N. Posons $i' = u(i)$, $j' = u(j)$ et $k' = u(k)$. C'est une base orthonormée, donc il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que i, j, k et $i', j', \epsilon k'$ ont la même orientation. Mais on sait que le groupe des quaternions purs de norme 1 quotienté par $\{\pm 1\}$ est isomorphe à $SO_3(\mathbb{R})$ via l'application automorphismes interieurs (qui à q associe $s_q : x \mapsto qxq^{-1}$). Donc il existe q pur de norme 1 tel que $i' = s_q(i)$, $j' = s_q(j)$, $\epsilon k' = s_q(k)$. Or s_q provient d'un automorphisme intérieur d'anneaux sur $\mathbb{H}$ et donc $u(ij) = u(k) = k' = u(i)u(j) = i'j' = s_q(i)s_q(j) = s_q(ij) = \epsilon k'$. Donc $\epsilon = 1$ et donc u coincide avec s_q sur P donc est intérieur.

Exercice 2 – **(Théorème de Lagrange)** Soit A un anneau unitaire et $\mathbb{H}(A)$ la A-algèbre des éléments $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in A$ telle que 1 est neutre pour la multiplication et avec les relations que l'on croit :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

On construit comme précédemment, la conjuguaison et la norme N.

1. *Montrer que N est à valeurs dans A et que N est multiplicative.* C'est un calcul.

2. On définit les *quaternions d'Hurwitz* par

$$H := \left\{ a + bi + ck + dk \in \mathbb{H}(\mathbb{Q}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}^4\right) \right\}.$$

   Montrer que H est un sous-anneau de $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ contenant $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et vérifiant $N(z) = 1$ si et seulement si z est inversible dans H. Là encore sans difficulté.

3. *Montrer que tout idéal à droite (respectivement à gauche) est principal.* Si $x \in \mathbb{H}(\mathbb{Q})$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$N(x - (a + bi + cj + dk) \leq 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

De plus l'inégalité est stricte sauf si x est dans $(\frac{1}{2}+\mathbb{Z})^4$. Donc on peut trouver $z \in H$ tel que $N(x-z) < 1$. Soit alors I un idéal non nul de H et soit u dans I, non nul de norme minimale. Cet élément est inversible dans $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ (car non nul) et si y est quelconque dans I, on a pour tout z

$$N(y - zu) = N(yu^{-1} - z)N(u).$$

Or on peut trouver z dans H tel que $N(yu^{-1} - z) < 1$ donc ceci prouve que $y = zu$.

4. *Montrer que, pour tout nombre premier p, il existe $z \in H$ tel que $N(z) = p$.* Si $p = 2$ l'énoncé est vrai. On suppose dans la suite que p est impair. L'idéal pH est bilatère, on peut donc former l'anneau quotient H/pH et on voit que l'on a l'isomorphisme

$$H/pH \simeq \mathbb{H}(\mathbb{Z})/p\mathbb{H}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{H}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

En effet, si z est dans H alors il est congru mod pH à un élément de $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ car si

$$z \in (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})^4 \text{ alors } \ z = z + p\frac{1}{2}(1 + i + j + k) \mod pH.$$

Or on peut résoudre le problème modulo p : la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ admet un vecteur isotrope non trivial sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc il existe $x \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tel que $N(x) = 0$ et $x \neq 0$. Cet élément n'est pas inversible donc engendre un idéal non trivial. l'image réciproque de cet idéal dans H est un idéal strictement compris entre pH et H. Il est principal donc de la forme zH et on voit que $p = zz'$ donc $p^2 = N(z)N(z')$ mais z n'étant pas inversible et de même pour z' on en déduit que $N(z) = p$.

5. *Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés.* Si le z précédent est a coordonnées dans $\mathbb{Z}$ on a fini. Sinon z est à coordonnées dans $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Dans ce cas on remplace z par zu avec $u = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$. En effet, posons y la classe de $2z \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$ vu modulo 4 dans $\mathbb{H}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. On sait que $N(z)$ est un entier donc $N(2z) \in 4\mathbb{Z}$ et donc $N(y) = 0$ et $y\bar{y} = 0$. Or $\bar{y}$ est la classe d'un quaternion z' de la forme $\pm 1 \pm i \pm j \pm k$. En posant $u = \frac{1}{2}z'$, on voit que u est de norme 1 et que la classe de $2z \cdot 2u = 0 \mod 4$ donc que $zu \in \mathbb{H}(\mathbb{Z})$. Ainsi $p = N(z) = N(zu)$.