Marches aléatoires en milieu aléatoire sur des arbres

Gabriel Faraud

19 janvier 2007

Thèse préparée à l'Université Paris 13 Villetaneuse sous la direction de Yueyun Hu

Table des matières

Le but de ce mémoire est d'introduire quelques modèles courants de marches aléatoires en milieu aléatoire, et de présenter un aperçu des résultats qui ont été démontrés dans ces divers cas. On s'intéressera ensuite plus particulièrement au cas de MAMAs sur des arbres, pour présenter un critère de transience élémentaire, avant de présenter un certain nombre de voies de recherches à explorer sur le sujet .

1 Introduction

Pour résoudre des problèmes issus de la physique, on a souvent besoin de modéliser des données auxquelles on n'a pas accès. Un exemple élémentaire est celui d'un lancer de dé : on pourrait a priori calculer le mouvement si l'on connaissait exactement les caractéristiques du jet, mais en pratique il est impossible d'accéder à ces données avec une précision suffisante, et encore plus dur de mener à bien les calculs...

Quand il s'agit de modéliser un milieu, par exemple l'air, il est encore plus impossible de tenir compte de tous les facteurs. La solution la plus naturellement utilisée par les physiciens est de le modéliser par le vide, c'est à dire par un milieu homogène. Mais depuis quelques années, beaucoup de mathématiciens et de physiciens tentent de mettre en place des modèles où des milieux inconnus sont modélisés, non pas par un milieu homogène, mais par un milieu aléatoire. Il arrive en effet très souvent que l'on obtiennent ainsi des comportements très différents de ceux obtenus "dans le vide".

Cependant, en plus d'être des "bons" modèles physiques, les phénomènes en milieu aléatoire s'avèrent souvent être des objets mathématiques intéressants en eux-mêmes, présentant souvent des comportements originaux, ou, d'un autre point de vue, présentant des similarités avec d'autres objets, tels que les marches renforcés, les processus de branchement, directement issus de la physique.

C'est ainsi que les marches aléatoires en milieu aléatoire ont été introduites en 1967 par Chernov et Temkin afin de modéliser simplement la réplication de l'ADN. Depuis de nombreux modèles ont été étudiés, mais d'une manière générale, il s'agit de faire évoluer une chaîne de Markov sur un espace donné [1], suivant des probabilités de transition tirées elles-mêmes au hasard. Ce type de processus est intéressant pour améliorer des modèles utilisant des marches aléatoires classiques, et les adapter dans des cas où l'environnement est difficile à décrire, et leur étude apporte fréquemment des résultats surprenants, avec des comportements sensiblement différents. Cependant ces processus peuvent également être étudiés pour eux mêmes, comme exemples de processus non-Markoviens.

2 Marches aléatoires en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$

2.1 Présentation

On commence par définir ce qu'est un environnement.

Pour cela on définit l'espace
$$\Omega = [0,1]^{\mathbb{Z}},$$
et on appelle environnement un élément ω de Ω. Il s'agit donc d'une famille de réels de $[0,1]$ indexés par les points de l'espace.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on introduit la chaîne de Markov (X_n, P^ω) définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \begin{cases} P^\omega(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = \omega(x) \\ P^\omega(X_{n+1} = x-1 | X_n = x) = 1 - \omega(x) \end{cases} .$$

La loi P^ω est appelée loi "Quenched" de la MAMA.

[1] on verra dans ce mémoire les cas de $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}^n$, et enfin le cas des arbres

On va maintenant introduire le caractère aléatoire du milieu, c'est à dire introduire une loi μ sur Ω et considérer ainsi ω comme une variable aléatoire de loi

On peut alors considérer la loi "Annealed", définie par

$$\mathbb{P} = \int_\Omega P^\omega d\mu(\omega).$$

Dans tous le reste de ce mémoire, on considérera que les ω sont tirés indépendamment avec la même loi, c'est à dire que

$$\mu = \nu^{\otimes \mathbb{Z}}$$

Remarque : -La loi $\mathbb{P}$ définit en général un processus non Markovien : informellement si l'on sait que dans le passé la chaîne a beaucoup utilisé le saut $x \to x+1$, on peut en déduire que $\omega(x)$ a des chances d'être élevé, le processus annealed a donc tendance à repasser aux mêmes endroits.

2.2 Critère de récurrence

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, on a des résultats très précis concernant le comportement asymptotique des MAMAs. Nous allons tout d'abord introduire un critère de récurrence/transience :

Théorème 2.1 (Solomon 1975) *-Si* $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] < 0,$ *alors* $\mathbb{P}$ *p.s,* $X_n \to +\infty$
-Si $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] > 0,$ *alors* $\mathbb{P}$ *p.s,* $X_n \to -\infty$
-Si $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] = 0,$ *alors* $\mathbb{P}$ *p.s,* $\overline{\lim}\, X_n = +\infty$ *et* $\underline{\lim}\, X_n = -\infty$ *[Sol75]*

Idée de la preuve : Il s'agit de l'adaptation d'une des preuves existant pour les marches aléatoires classiques. On cherche une fonction f_ω harmonique, c'est à dire telle que sous P_ω, $f_\omega(X_n)$ soit une martingale. Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} f_\omega(x) = -1 - \sum_{1\le k\le x-1} \frac{1-\omega(1)}{\omega(1)} \cdots \frac{1-\omega(k)}{\omega(k)} & \forall x \ge 1 \\ f_\omega(x) = \sum_{0\le k\le |x|} \frac{\omega(0)}{1-\omega(0)} \cdots \frac{\omega(-k)}{1-\omega(-k)} & \forall x \le -1 \end{cases}.$$

La fonction f_ω étant imposée dès lors que l'on a fixé sa valeur en 0 et 1. On étudie ensuite le comportement en $+\infty$ et $-\infty$ de f_ω, qui dépend du signe de $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})]$, ce qui permet de conclure en utilisant des résultats de convergence de martingales.

2.3 Vitesse asymptotique

Après ce critère de récurrence/transience, nous présentons sans preuve deux résultats concernant le comportement asymptotique des MAMAs sur $\mathbb{Z}$. Ces résultats font apparaître une première différence de comportement entre les MAMAs et les marches classiques.

Théorème 2.2 (Solomon 1975) *On note* $\rho = \frac{1-\omega(0)}{\omega(0)}$.
-Si $E_\mu[\rho] < 1,$ *alors* $\frac{X_n}{n} \to \frac{1-E[\rho]}{1+E[\rho]}\ \mathbb{P}-p.s.$
-Si $E_\mu[1/\rho] < 1,$ *alors* $\frac{X_n}{n} \to \frac{1-E[1/\rho]}{1+E[1/\rho]}\ \mathbb{P}-p.s.$
-Si $1/E_\mu[\rho] \le 1 \le E_\mu[1/\rho],$ *alors* $\frac{X_n}{n} \to 0\ \mathbb{P}-p.s.$

Preuve : Voir [Sol75].

Remarque : On voit donc apparaître une vitesse de fuite qui est strictement inférieure à celle d'une marche aléatoire simple, où on aurait par la loi des grands nombres

$$X_n/n \to 2E[\omega] - 1.$$

On peut enfin caractériser plus précisément le comportement dans le cas récurrent :

Théorème 2.3 (Sinai 1982) *on suppose* $E_\mu[log(\frac{1-\omega}{\omega})] = 0$, *et* $E_\mu[(log(\frac{1-\omega}{\omega}))^2] < \infty$, *alors,* $\frac{X_n}{(\log(n))^2}$ *converge en loi vers une loi non dégénérée.*

Preuve : Voir [Sin82]. La principale idée de la preuve est de constater que la fonction

$$f'_\omega(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{x} e^{W(k)} & \forall x \geq 0 \\ -\sum_{k=0}^{-(x-1)} e^{W(-k)} & \forall x < 0 \end{cases}$$

est harmonique, où

$$W_i = \begin{cases} \sum_{k=0}^{x-1} \log(\rho(k)) & \forall x \geq 0 \\ -\sum_{k=0}^{-x} \log(\rho(-k)) & \forall x < 0 \end{cases} {}^{2},$$

Et de constater que $\mathbb{P} - p.s.$, $W(\lceil kt \rceil)/\sqrt{k}$ converge vers le mouvement brownien.

Remarque : On obtient ici un comportement vraiment différent de celui d'une marche aléatoire classique, où l'on aurait un comportement en $\sqrt{n}$.

Cette liste non exhaustive donne une idée de ce que l'on peut calculer concernant les MAMAs unidimensionnelles, nous allons maintenant nous intéresser au cas multidimensionnel, où, comme on va le voir, beaucoup moins de résultats existent.

3 Le cas multidimensionnel

3.1 le modèle

On appelle maintenant environnement la donnée de $(\omega(x, x+e))_{x\in\mathbb{Z}^d, |e|=1}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{Z}^d, \sum_{|e|=1} \omega(x, x+e) = 1$, et on va considérer que les vecteurs $(\omega(x, x+e))_{|e|=1}$ sont i.i.d. de loi μ. On construit comme précédemment la collection de chaînes de Markov (X_n, P^ω) définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1, P^\omega(X_{n+1} = x + e | X_n = x) = \omega(x, x+e)$$

et on construit comme précédemment la probabilité annealed $\mathbb{P}_0$. On peut définir comme précédemment la notion de transience :

---

[2] W est appelé le potentiel

Théorème 3.1

$$\mathbb{P}_0(X_n \textit{ visite tous les sites de } \mathbb{Z}^d \textit{ infiniment souvent}) = \mathbb{P}_0(X_n \textit{ visite } x_0 \textit{ infiniment souvent}) = 0 \textit{ ou } 1, \forall x_0 \in \mathbb{Z}^d. \quad (1)$$

Cependant, on ne dispose pas, sans faire d'hypothèse plus précise, de critère de transience. On peut néanmoins, sous des hypothèse contraignantes, obtenir un critère de transience, et même une loi des grands nombres. Pour ces résultats voir [Kal81] et [SZ99].

4 Marches aléatoires en milieu aléatoire sur des arbres

4.1 le modèle

On note $\mathbb{T}$ un arbre infini, sur lequel on ne fait a priori pas d'hypothèses, e sa racine, on note $|x-y|$ la longueur du plus court chemin de x à y (avec la convention $|x| = |x-e|$).

Pour chaque noeud x de $\mathbb{T}$, on note $\overleftarrow{x}$ son père, on note également $\mathbb{T}_n$ l'ensemble des noeuds à distance n de la racine, et $M_n = |\mathbb{T}_n|$, on note enfin $x < y$ si x est un ancêtre de y.

On se donne une famille de variables aléatoires $(\omega(x,y))_{x,y\in\mathbb{T}}$, vérifiant

$$\forall x \ \in \mathbb{T}, \sum_{y\in\mathbb{T}} \omega(x,y) = 1.$$

On note de plus

$$A(x) = \frac{\omega(\overleftarrow{x}, x)}{\omega(\overleftarrow{x}, \overleftarrow{\overleftarrow{x}})}.$$

On va supposer d'autre part que les vecteurs $\omega(x,.)$ sont iid, et que les $A(x)_{x\in\mathbb{T},|x|>2}$ sont identiquement distribués. Les $A(x)_{x\in\mathbb{T},|x|\leq 2}$ n'étant pas définis, et n'ayan pas d'influence sur le problème, on les fixe arbitrairement comme de même loi que les autres.

On va enfin faire l'hypothèse (ellipticité) qu'$\exists \varepsilon_0 > 0$ tq

$$\begin{cases} \omega(x,y) > \varepsilon_0 & |x-y| = 1 \\ \omega(x,y) = 0 & |x-y| \neq 1 \end{cases}.$$

Pour la pertinence de ces hypothèses voir [LP92]. On va ensuite, comme précédemment, définir la collection de chaînes de Markov (X_n, P^ω) définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z}, P^\omega(X_{n+1} = y | X_n = x) = \omega(x,y).$$

Pour énoncer le premier résultat concernant ces marches aléatoires dans toute leur généralité, il faut définir certaines notions concernant les arbres :

Définition 4.1 *1. On appelle* cutset *un ensemble fini π de noeuds tel que tout chemin de e à l'infini intersecte π, et qui ne contienne aucune paire x, y telle que x soit un ancêtre de y. On note Π l'ensemble des* cutsets

2. Le nombre de branchement *d'un arbre est défini par la formule :*

$$br\mathbb{T} = \inf(\lambda > 0; \inf_{\pi\in\Pi} \sum_{\sigma\in\pi} \lambda^{-|\sigma|})$$

Remarque : Ces définitions apparemment formelles correspondent en fait à des notions assez intuitives : un *cutset* est un ensemble qui sépare la racine de l'infini, et qui est "minimal" pour cette propriété, tandis que le nombre de branchement correspond le plus souvent à la vitesse de croissance moyenne de l'arbre (par exemple b pour un arbre $b - regulier$, E[nombre d'enfants] pour un arbre de Galton-Watson presque sûrement...)

4.2 Critère de récurrence

4.2.1 Dans un arbre fixé

On peut alors énoncer un critère de récurrence, dû à [LP92] :

Théorème 4.1 *On suppose que* $0 < A < \infty$ *p.s., et on pose* $\rho(x) = E[A^x]$ *et* $p = \inf_{0 \leq x \leq 1} \rho(x)$*, alors :*

1. *si* $pbr\mathbb{T} > 1$*, alors la MAMA est presque sûrement transiente.*
2. *si* $pbr\mathbb{T} < 1$*, alors la MAMA est presque sûrement récurrente*
3. *si* $p \overline{\lim} M_n^{1/n} < 1$*, alors la MAMA est presque sûrement récurrente positive.*

Remarque : en prenant $A = cte$ on retrouve le résultat pour des marches aléatoires normales.

4.2.2 Dans un arbre aléatoire

On peut bien sur étendre le modèle à des arbres aléatoires. Dans ce cas, l'environnement est la donnée de l'arbre et des $A(x)$. Le modèle le plus courant est celui d'un arbre de Galton-Watson. Ce modèle est détaillé dans, par exemple [Liu97]. On a un version du critère de récurrence sur des arbres de Galton-Watson :

Théorème 4.2 *On suppose maintenant que* $\mathbb{T}$ *est un arbre de Galton-Watson, la loi du nombre d'enfants étant donnée par une variable aléatoire* N*, et on suppose* $m = E[N] > 1$*. Alors on suppose que* $0 < A < \infty$ *p.s., et on pose* $p = \inf_{0 \leq x \leq 1} E[A^x]$*, alors, conditionnellement à la survie (i.e. à* $\mathbb{T}$ *infini) :*

1. *si* $pm > 1$*, alors la MAMA est presque sûrement transiente.*
2. *si* $pm \leq 1$*, alors la MAMA est presque sûrement récurrente*
3. *si* $pm < 1$*, alors la MAMA est presque sûrement récurrente positive.*

La preuve de ces deux résultat utilise une correspondance entre les marches aléatoires et des réseaux électriques, qu'il est impossible de décrire ici. On trouvera les détails sur la correspondance en question dans [DS84, LP05] et la preuve en elle même dans [LP92].

Nous allons maintenant présenter une relation importante entre les marches aléatoires sur les arbres et un processus connu sous le nom de cascade multiplicative de Mandelbrot, et appliquer ce résultat à l'étude du cas récurrent. Cette correspondance a été mise en valeur pour la première fois par [MP02], et est à la base de nombreux résultats sur les MAMAs sur des arbres.

4.3 Martingale de Mandelbrot.

4.3.1 Définition

Afin de limiter les notations nous donnons ici une définition simplifiée de la martingale de Mandelbrot. Pour une définition plus complète voir [MP02, Man74].

Soit $\mathbb{T}$ un arbre de Galton Watson en régime surcritique, et $A(x)$ une famille de variables aléatoires *i.i.d.* indexée par les noeuds de l'arbre [3] .

On définit la filtration

$$F_n = \sigma\{(N_x, A_x), |x| \leq n\}$$

Définition 4.2 *La cascade de Mandelbrot est le processus défini par*

$$Y_n = \sum_{x \in \mathbb{T}_n} \prod_{0<z\leq x} A(z).$$

On peut énoncer une première propriété de ce processus :

Proposition 4.1 *On suppose $0 < mE[A] < \infty$, on suppose d'autre part que $E[\sum_1^N A_i] = 1$ et que presque sûrement $N \geq 1$ alors Y_n est une martingale, qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y dont la distribution est solution de l'équation*

$$Y \underset{\text{loi}}{=} \sum_1^N A_i Y_i,$$

où les Y_i sont des copies indépendantes de Y.

De plus, $0 < Y < \infty, p.s.$ si et seulement si $E[\sum_1^N A_i \log(A_i)] < 0$.

Voir l'Annexe pour la preuve de ces résultats.

4.3.2 Mesures invariantes

Pour faire apparaître le lien entre la martingale de Mandelbrot et les M.A.M.A.s sur les arbres nous allons nous intéresser aux mesures invariantes (pour P_ω).

Proposition 4.2 *Soit π une mesure invariante, alors*

$$\pi(x) = \frac{\pi(e)\omega(e, x^{(1)})}{\omega(x, \overleftarrow{x})A(x^{(1)})} \prod_{0<z\leq x} A(z),$$

où $x^{(1)}$ est le premier élément sur le plus court chemin de e à x. Et par un corollaire évident,

$$\exists c, c' : c \prod_{0<z\leq x} A(z) \leq \pi(x) \leq c' \prod_{0<z\leq x} A(z).$$

Preuve : Par induction en utilisant $\omega(x, \overleftarrow{x})\pi(x) = \omega(\overleftarrow{x}, x)\pi(\overleftarrow{x})$.

---

[3] Pour plus de précision sur les arbres de Galton-Watson voir [Nev86]

On connaît d'autre part le théorème

Théorème 4.3 *Soit X_n une chaîne de Markov récurrente irréductible sur un espace E, x un point de E. On note*

$$\nu_x(y) = E_x[\sum_0^{H_x-1} 1_{X_n=y}],$$

où H_x est le premier temps de retour en x. Alors ν_x est une mesure invariante, et toute mesure invariante est de la forme $C\nu_x$.

D'autre part, si l'on ne suppose pas la chaîne de Markov récurrente, si il existe une mesure invariante de masse totale finie, alors la chaîne est récurrente irréductible.

Nous pouvons donc préciser le critère de récurrence :

Théorème 4.4 *On suppose que $pm = 1$, et que $\rho'(1) < 0$, alors la marche est récurrente nulle.*

preuve : Les conditions $pm = 1$ et $\rho'(1) < 0$ impliquent que $E[\sum_1^N A_i] = 1$ par convexité de ρ, et que $E[\sum_1^N A_i \log(A_i)] < 0$ car $\rho'(x) = E[\sum_1^N A_i^x \log(A_i)]$.

On peut par la même méthode préciser le cas $\rho'(1) \geq 0$, mais nous allons maintenant nous intéresser à une étude asymptotique dans le cas récurrent.

5 Etude asymptotique du cas récurrent

On suppose maintenant que $\mathbb{T}$ est un arbre b-régulier, et on construit comme précédemment la M.A.M.A. sur $\mathbb{T}$. On peut alors caractériser le comportement de la marche, tout d'abord dans le cas sous-critique.

5.1 Cas sous-critique

Théorème 5.1 *On suppose $p < 1/b$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \max_{0\leq i\leq n} X_i = \frac{1}{\log[1/(qb)]} \ \mathbb{P}p.s.,$$

où q est une constante explicite (cf [HS06b]).

5.2 Cas critique

Dans le cas critique, il faut distinguer deux cas : le cas $\rho'(1) < 0$:

5.2.1 Régime sous-diffusif

On note $a_n \approx b_n$ si $\log a_n / \log b_n \to 1$

Théorème 5.2 *On note $a_n \approx b_n$ si $\log a_n / \log b_n \to 1$*

On suppose $p = 1/b$, $\rho'(1) < 0$, on note $\kappa = \inf\{t > 1 : E[A^t] = 1/b\}$, alors

$$\max_{0\leq i\leq n} X_i \approx n^\gamma \ \mathbb{P}p.s.$$

avec $\gamma = 1 - 1/\min(\kappa, 2)$.

Et le cas $\rho'(1) \geq 0$

5.2.2 Régime "à la Sinaï"

Théorème 5.3 *On suppose* $p = 1/b$, $\rho'(1) \geq 0$, *on note* $X_n^* = \max_{0 \leq i \leq n} X_i$ *alors il existe des constantes* $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ *telles que*

$$c_1 \leq \underline{\lim} \frac{X_n^*}{(\log n)^3} \leq \overline{\lim} \frac{X_n^*}{(\log n)^3} \leq c_2 \ \mathbb{P} p.s.$$

Pour la preuve de ces théorèmes voir [HS06b, HS06a].

6 Annexe

Nous présentons ici la preuve de la proposition 4.1. La convergence de Y_n vers une variable aléatoire Y est évidente. D'autre part, par le lemme de Fatou, on a $E[Y_\infty] < 1$, ce qui nous assure que $Y < \infty$ p.s. La seule partie difficile est de montrer que $0 < Y, p.s.$ si et seulement si $E[\sum_1^N A_i \log(A_i)] < 0$. Une partie de ce résultat a déjà été montrée dans [Liu97].

Théorème 6.1 *On définit la cascade de Mandelbrot comme dans 4.2, On suppose que* $E[N] < \infty$ *et que* $E[\sum_1^N A_i] = 1$ *alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $E[Y] = 1$.
2. $E[Y] > 0$.
3. $E[(\sum_1^N A_i) \log^+(\sum_1^N A_i)] < \infty$ *et* $E[\sum_1^N A_i \log(A_i)] < 0$.
4. *La suite* Y_n *converge vers* Y *dans* L^1.
5. *Les* Y_n *sont équi-intégrables.*
6. $E[Y|F_n] = Y_n$

Dans le cas qui nous intéresse, les hypothèses $E[(\sum_1^N A_i) \log^+(\sum_1^N A_i)] < \infty$, $E[(\sum_1^N A_i) \log^+(\sum_1^N A_i)] <$ ∞ et $E[\sum_1^N A_i] = 1$ sont naturellement vérifiées.

Il nous suffit alors de montrer que si Y n'est pas identiquement nul, alors $Y > 0, p.s.$ On note $\phi(x) = E_\omega[e^{-tY}]$, alors il suffit de montrer que, si Y n'est pas identiquement nul, $\lim_{x \to \infty} \phi(x) = 0, p.s.$

En effet,

$$\phi(x) \geq P_\omega(Y = 0).$$

En utilisant

$$Y \underset{\text{loi}}{=} \sum_1^N A_i Y_i,$$

on obtient, $\mathbb{P}$ $p.s.$,

$$\begin{aligned} \phi(x) = E[e^{-t \sum_1^N A_i Y_i}] \\ &= E[E[e^{-tA_i Y_i}]^N] \\ &\leq E[E[e^{-taY_i}]^N], (a = \inf A) \\ &\leq E[\phi(at)^N] \\ &\leq E[\phi(a^n t)^{N_1 N_2 \dots N_n}.] \end{aligned}$$

où $N_1 N_2 \dots N_n$ sont des copies indépendantes de N. On note $M_n = N_1 N_2 \dots N_n$. On a $\log M_n = \sum_1^n \log N_i$. Sous l'hypothèse $N \geq 1$ p.s. et $\mathbb{T}$ surcritique, $0 < E[\log N] < \infty$ Donc

$$\log[M_n]/n \to E[\log N]$$

.

donc pour n assez grand, $\log M_n \geq Cn$ où C est une constante positive. d'où, en notant $b = 1/a$, pour $t \geq b^k$ on a

$$\phi(t) \leq \phi(1)^{c^k}$$

avec $c > 1$. Or si l'on suppose que Y n'est pas identiquement nulle, alors $\phi(1) < 1$ et donc on a le résultat voulu par monotonicité. On a même

$$\phi(t) \leq \exp[-ct^\gamma]$$

pour $\gamma > -\frac{E[\log N]}{\log a}$.

Références

[DS84] P.G. Doyle and J.L. Snell. Random walks and electric networks. *Mathematical association of America, Washington, DC*, 1984.

[HS06a] Y. Hu and Z. Shi. Slow movement of random walk in random environnement on a regular tree. *ArXiv math.PR/0608036*, 2006+.

[HS06b] Y. Hu and Z. Shi. A sub-diffusive behaviour for recurrent random walk in random environnement on a regular tree. *ArXiv math.PR/0603363*, 2006+.

[Kal81] S.A. Kalikow. Generalized random walks in a random environment. *Annals of Proba.*, 9 :753–768, 1981.

[KKS75] H. Kesten, M.V. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law one dimensional random walk in a random environment. *Compositio. Math.*, 30 :145–168, 1975.

[Liu97] Q.S. Liu. Sur une equation fnctionnelle et ses applications : une extension du théorème de kesten-stigum concernant des processus de branchement. *Adv.Appl. Proba..*, 29 :353–373, 1997.

[Liu00] Q.S. Liu. On generalized multiplicative cascades. *Stoch. Proc. Appl.*, 86 :263–286, 2000.

[Liu01] Q.S. Liu. Asymptotics properties and absolute continuity of laws stable by random weighted mean. *Stoch. Proc. Appl.*, 95 :125–136, 2001.

[LP92] R. Lyons and R. Pemantle. Random walks in a random environment and first-passage percolation and trees. *Annals of Proba.*, 20 :125–136, 1992.

[LP05] R. Lyons and Y. Peres. *Probability on trees and networks.* http ://mypage.iu.edu/ rdlyons/prbtree/prbtree.html, 2005.

[Man74] B. Mandelbrot. multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 278 :289–292, 1974.

[MP02] M.V. Menshikov and D. Petritis. On random walks in random environment in trees and their relationship with multiplicative chaos. In *Mathematics and computer science II (Versailles, 2002)*, pages 415–422. Birkhaüser, Basel, 2002.

[Nev86] J. Neveu. Arbres et processus de galton-watson. *Ann. Inst. H.Poincaré*, 22 :199–207, 1986.

[Sin82] Ya.G. Sinai. The limit behaviour of a one dimensional random walk in a random environment. *Theory Prob. Appl.*, 27 :247–258, 1982.

[Sol75] F. Solomon. Random walks in a random environment. *Annals of Proba.*, 3 :1–31, 1975.

[SZ99] A.S. Sznitman and M.P.W. Zerner. A law of large numbers for random walks in a random environment. *Annals of Proba.*, 27 :1851–1869, 1999.