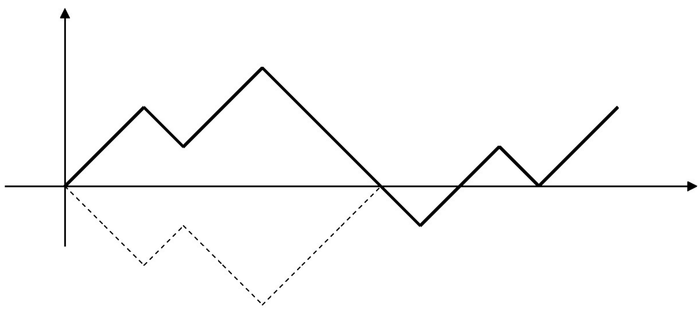
FIMFA - ENS

Théorème du scrutin et applications

Exposé de maîtrise

Max Fathi et Thomas Gobet



Semestre de printemps 2009

Travail réalisé sous la direction de Jean Bertoin

École Normale Supérieure de Paris

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier le théorème dit du scrutin ainsi que des applications élémentaires de celui-ci. La première partie consiste en l'énoncé ainsi qu'en plusieurs démonstrations dudit théorème selon une logique historique. Des applications immédiates en théorie des probabilités sont en outre données tout comme une généralisation du théorème qui en fournit une preuve supplémentaire. On démontre ensuite plusieurs extensions du théorème du scrutin dans le cas discret, ce qui permet notamment d'en donner une application particulièrement originale : une preuve de la formule d'inversion de Lagrange. On peut grâce à cet outil déterminer la loi de la population totale d'un processus de Galton-Watson (y compris si la probabilité que la population soit infinie est non nulle). Enfin, quelques résultats faisant écho au théorème du scrutin sont donnés dans le cas de processus stochastiques en temps continu.

Les auteurs remercient Jean Bertoin qui a proposé ce sujet. Ils remercient également Murielle Podevin et Pierre-Yves Coudert pour leur relecture attentive qui a permis de corriger de nombreuses erreurs et imprécisions.

Table des matières

1 Introduction

Le théorème du scrutin est un résultat de nature essentiellement combinatoire. Il a été posé pour la première fois par Bertrand sous la forme suivante :

Théorème 1.1. *Imaginons un scrutin entre deux candidats A et B. À la fin du scrutin, A obtient n voix, B en obtient m, avec $n > m$. Alors si l'on admet que les ordres d'arrivée des voix sont équiprobables, la probabilité p_A pour que le nombre de voix pour A ait été strictement supérieur au nombre de voix pour B tout au long du scrutin vaut $(n-m)/(n+m)$.*

L'idée de démonstration avancée par Bertrand est la suivante : considérons la situation de l'énoncé du théorème ; on constate que si l'on sait que A a obtenu n voix et B en a obtenu $m < n$, le nombre total d'ordres d'arrivée des voix possibles est égal au coefficient binomial

$$C_n^{n+m} = (n+m)!/(n!\ m!).$$

Notons $F(n,m)$ le nombre de ces situations qui sont favorables, i.e., qui constituent des ordres d'arrivée des voix où A est en tête tout au long du scrutin. Alors, suivant que le dernier vote est pour A ou pour B, on peut écrire la relation suivante :

$$F(n,m) = F(n-1,m) + F(n,m-1).$$

Il ne s'agit évidemment pas d'une démonstration, mais cette idée peut être utilisée pour fournir une preuve par récurrence du théorème. Considérons en effet la quantité

$$D(n,m) := C_n^{n+m} - F(n,m)$$

qui représente le nombre de situations où au moins à un moment donné du scrutin, A n'est pas en tête. Démontrer le théorème du scrutin revient à s'assurer que pour $m < n$, on a la relation suivante :

$$D(n,m) = 2m\frac{C_n^{n+m}}{n+m}.$$

Cette relation a évidemment lieu pour le cas $m = 0$ puisqu'on a alors $C_n^n = 1$, $F(n,0) = 1$. De même si $n = m$, on a $F(n,n) = 0$. Supposons alors $n > m+1$. On rappelle que les coefficients binomiaux satisfont la relation

$$C_{n+1}^{n+m+2} = C_{n+1}^{n+m+1} + C_{m+1}^{n+m+1}.$$

Ainsi on a, par récurrence :

$$\begin{aligned}
D(n+1,m+1) &= D(n+1,m) + D(n,m+1) \\
&= \frac{2m}{n+m+1}C_{n+1}^{n+m+1} + \frac{2(m+1)}{n+m+1}C_{m+1}^{n+m+1} \\
&= \frac{2m}{n+m+1}C_{n+1}^{n+m+2} + \frac{2}{n+m+1}C_{m+1}^{n+m+1} \\
&= \frac{2(m+1)}{n+m+2}C_{n+1}^{n+m+2}.
\end{aligned}$$

De même on vérifie facilement que la relation a lieu pour le cas $n = m + 1$. Ceci montre le résultat.

Cette preuve est rarement celle qui est donnée, car le théorème du scrutin peut être reformulé en termes de marches aléatoires : en effet, si l'on considérait les votes possibles commes des variables aléatoires indépendantes et de même loi (on pourra même affaiblir cette hypothèse), alors le problème du scrutin ne serait autre qu'un problème de marche aléatoire. Sans aller jusqu'à la situation des variables aléatoires, il paraît assez naturel de représenter la situation sous la forme d'une "marche" de la façon suivante : on part de $(0, 0)$ et dès qu'un vote est déposé dans l'urne, on ajoute $(1, 1)$ s'il est en faveur de A et on ajoute $(1, -1)$ s'il est en faveur de B, en supposant qu'il n'y ait pas de bulletins nuls.

Il pourra donc paraître tautologique, dans la suite du présent document, de parler d'applications du théorème du scrutin aux marches aléatoires, sachant qu'il peut être reformulé en termes de marches aléatoires. Cette approche est toutefois privilégiée dans la mesure où elle correspond à ce qui s'est produit historiquement ; en effet, l'esquisse de preuve de Bertrand ne laisse pas suggérer qu'il avait pensé à représenter la situation comme une marche. Il a d'ailleurs affirmé, suite à des démonstrations d'extensions du théorème du scrutin (qui sont étudiées dans la suite du présent document), que ce qu'il avait proposé au début comme un simple exercice de calcul combinatoire représentait en fait un résultat très important lié à des problèmes de jeux.

En plus des applications directes de ce théorème aux marches aléatoires (lesquelles peuvent d'ailleurs être démontrées sans le théorème du scrutin, au moyen par exemple de la théorie des chaînes de Markov), le présent document propose plusieurs extensions du résultat dans le cas discret comme dans le cas continu, ainsi qu'une application plutôt inattendue en théorie des fonctions analytiques : une démonstration de la formule d'inversion de Lagrange. Celle-ci permet en outre d'obtenir la loi de la population totale d'un processus de Galton-Watson à k individus initiaux, ceci même si la probabilité que la population soit infinie est strictement positive (dans le cas où cette probabilité est nulle, on peut obtenir directement la loi en question à partir d'une variante du théorème du scrutin).

2 Premières versions du théorème du scrutin

2.1 Preuve du théorème (principe de réflexion)

Dans ce paragraphe, on donne une seconde démonstration du théorème **??**. Il s'agit de la démonstration la plus classique généralement donnée par les ouvrages. L'idée est de représenter un ordre possible d'arrivée des voix par une marche comme suggéré dans l'introduction. L'argument essentiel repose sur un principe de réflexion.

Preuve du théorème **??**. On représente la situation par une "marche" où un bulletin pour A est codé par $+1$ et un bulletin pour B est codé par -1. Ainsi, on représente la situation par la ligne brisée suivante : on part de $(0, 0)$ puis, en considérant les bulletins de vote selon leur ordre d'arrivée dans le temps, on ajoute $(1, 1)$ chaque fois qu'on obtient un bulletin pour A et on ajoute $(1, -1)$ à chaque fois qu'on obtient un bulletin pour B. La ligne brisée aboutit ainsi au point $(n + m, n - m)$ et le nombre d'ordres possibles d'arrivée des voix est C_n^{n+m}. Ainsi, le candidat A est en tête tout au long du scrutin si et seulement si la ligne brisée passe par le point $(1, 1)$ et ne repasse ensuite jamais par l'axe des abscisses. Il s'agit donc de calculer le nombre total de chemins allant de $(1, 1)$ à $(n + m, n - m)$ et de lui soustraire le nombre de chemins qui ne conviennent pas, i.e., ceux qui rencontrent l'axe des abscisses.

Supposons ainsi qu'une ligne brisée repasse par l'axe des abscisses pour la première fois au point $(k, 0)$. Alors il suffit de considérer la réflexion de la première partie de la ligne brisée, jusqu'au point $(k, 0)$ par rapport à l'axe des abscisses et laisser inchangée la seconde partie de la ligne. On obtient ainsi une ligne brisée allant du point $(1, -1)$ au point $(n + m, n - m)$, ce qui établit une bijection entre les lignes brisées allant de $(1, 1)$ à $(n + m, n - m)$ et passant par l'axe des abscisses, et les lignes brisées allant de $(1, -1)$ à $(n + m, n - m)$, qui sont au nombre de C_{m-1}^{n+m-1}.

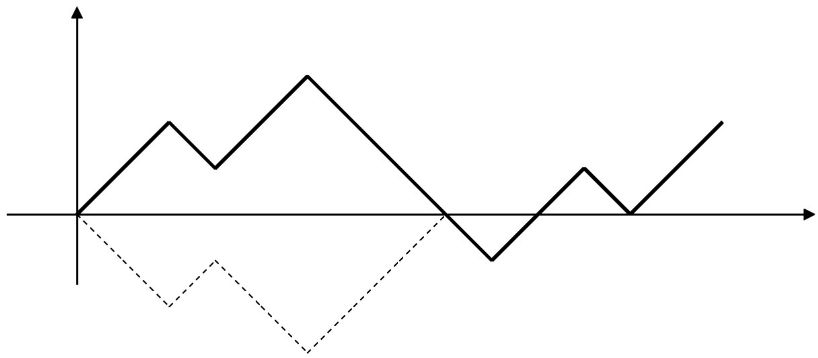


FIGURE 1 – Principe de réflexion

Le nombre N de dépouillements où A est en tête tout au long du scrutin vaut donc :

$$\begin{aligned} N &= C_{n-1}^{n+m-1} - C_{m-1}^{n+m-1} \\ &= \frac{(n+m-1)!(n-m)}{n!\ m!} \\ &= \frac{n-m}{n+m}\, C_n^{n+m}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$p_A = \frac{n-m}{n+m},$$

ce qui achève la preuve. □

2.2 Application : temps de retour à l'origine d'une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$

On s'intéresse à une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, à la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

où les X_i sont des variables aléatoires de Bernouilli indépendantes de paramètre 1/2. L'idée est de démontrer qu'une telle marche aléatoire revient forcément à l'origine, mais que l'espérance du premier temps de retour est infinie (dans la terminologie des chaînes de Markov, on montre ainsi qu'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est *récurrente nulle*).

Proposition 2.1. *Soient $(X_i)_{i>1}$ des variables aléatoires de Bernouilli indépendantes, de paramètre $p = 1/2$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors p.s. S_n revient à l'origine en un temps fini.*

Démonstration. Remarquons pour commencer que si $S_k = 0$ pour un $k > 0$, alors nécessairement k est pair. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité que S_{2n} vaille zéro est :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = C_n^{2n} \frac{1}{2^n}.$$

On s'intéresse ensuite à la probabilité que le point ne soit toujours pas repassé par l'origine après $2n$ sauts. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) &= \sum_{r>0} \mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) \\
&= \sum_{r>0} \mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n-2} > 0 \mid S_{2n} = 2r)\ \mathbb{P}(S_{2n} = 2r).
\end{aligned}$$

Or, l'événement $(S_2 > 0, \ldots, S_{2n-2} > 0 \mid S_{2n} = 2r)$ correspond à la situation du théorème du scrutin avec une somme de voix valant $2n$ et une différence de voix valant $2r$. On applique donc le théorème et on obtient :

$$\sum_{r>0} \mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n-2} > 0, S_{2n} = 2r) = \sum_{r>0} \mathbb{P}(S_{2n} = 2r)\ \frac{2r}{2n}.$$

Exprimons $\mathbb{P}(S_{2n} = 2r)$; si $S_{2n} = 2r$, alors parmi les $2n$ termes de S_{2n}, exactement $n + r$ valent $+1$. On a donc :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2r) = C_{n+r}^{2n} \frac{1}{2^{2n}}.$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) = \sum_{r=1}^{n} C_{n+r}^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \frac{r}{n}.$$

Or, un petit calcul montre que :

$$\frac{r}{n} C_{n+r}^{2n} = C_{n+r-1}^{2n-1} - C_{n+r}^{2n-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=1}^{n} (C_{n+r-1}^{2n-1} - C_{n+r}^{2n-1}) \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\ C_n^{2n-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ \mathbb{P}(S_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

On en déduit par symétrie que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\forall\ r \leq n, S_r \neq 0) &= \mathbb{P}(S_2 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) + \mathbb{P}(S_2 < 0, \ldots, S_{2n} < 0) \\ &= \mathbb{P}(S_{2n} = 0).\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité pour la marche aléatoire de ne pas retourner à l'origine avant l'instant $2n$ est égale à la probabilité pour que cette même marche aléatoire se trouve à l'origine au temps $2n$. Puisque :

$$\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^{2n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors p.s. la marche aléatoire retourne en zéro en un temps fini.

□

Proposition 2.2. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, l'espérance du temps de premier retour à l'origine de S_n est infinie.*

Démonstration. On conserve les notations de la proposition **??**. Exprimons la probabilité α_{2n} que S_n revienne à l'origine pour la première fois au temps $t = 2n, n \in \mathbb{N}^*$.

Le temps $t = 2n$ est le temps de premier retour en zéro de S_n si et seulement si $S_{2n-1} = 1$, $X_{2n} = -1$ et $S_k > \forall 0 < k < 2n$ (ou si l'on est dans la situation symétrique sur les abscisses négatives). La plupart des probabilités relatives à ces événements s'expriment de manière simple. La seule qui est moins intuitive est la probabilité que la marche aléatoire n'ait pas atteint l'origine sur les temps strictement positifs avant l'instant $2n$ sachant qu'elle est en zéro à l'instant $2n$. Si la marche aléatoire a toujours été sur des abscisses positives avant l'instant $2n$, elle est en particulier en 1 à l'instant 1. Ainsi, en parcourant la marche en sens contraire, de l'instant $2n$ à l'instant 1, on est exactement, sous ces hypothèses, dans la situation du théorème du scrutin, où la somme des voix vaut $2n - 1$ et la différence 1. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(S_k > 0 \ \ \forall k < 2n \mid S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n-1}.$$

Ainsi on peut exprimer α_{2n}, en se rappelant que X_{2n} est indépendant de S_{2n-1} :

$$\begin{aligned}\alpha_{2n} &= 2\ \mathbb{P}(S_k > 0 \ \ \forall k < 2n, S_{2n-1} = 1, X_{2n} = -1) \\ &= 2\ \mathbb{P}(S_k > 0 \ \ \forall k < 2n \mid S_{2n-1} = 1, X_{2n} = -1)\ \mathbb{P}(S_{2n-1} = 1, X_{2n} = -1) \\ &= 2\ \mathbb{P}(S_k > 0 \ \ \forall k < 2n \mid S_{2n} = 0)\ \mathbb{P}(S_{2n-1} = 1)\ \mathbb{P}(X_{2n} = -1) \\ &= 2\ \frac{1}{2n-1}\ C_n^{2n-1}\ \frac{1}{2^{2n-1}}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2n-1}\ C_n^{2n}\ \frac{1}{2^{2n}}.\end{aligned}$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On note u_{2n} la probabilité que la marche aléatoire se trouve à l'origine au temps $2n$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} C_n^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &\sim \frac{1}{2^{2n}} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \frac{1}{2\pi n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\alpha_{2n} = \frac{1}{2n-1} u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}},$$

ce qui montre que $2n\alpha_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et ainsi que l'espérance du temps de premier retour à l'origine est infinie.

□

2.3 Généralisation

Le but de ce paragraphe est de proposer une version plus forte du théorème **??**.

Définition 2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une* **permutation cyclique** *de $\{1, \dots, n\}$ est une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle qu'il existe $r \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $\sigma(i) = i + r$ où il est convenu que $\alpha + n = \alpha$ pour $\alpha \in \{1, \dots, n\}$.*

L'intérêt de la généralisation en question réside principalement dans sa démonstration, qui propose de résoudre le problème du scrutin en s'intéressant, étant donné un ordre d'arrivée des voix, aux ordres obtenus en appliquant à l'ordre initial une permutation cyclique. Cette approche, intimement liée à beaucoup de résultats faisant écho au théorème du scrutin, sera abondamment réutilisée pour proposer des extensions de ce dernier notamment dans le cas de variables aléatoires.

Théorème 2.1. *On considère un scrutin entre deux candidats A et B, à l'issue duquel le candidat A obtient n voix et le candidat B m voix, avec $n > km$, où k est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Alors, en supposant que les ordres de votes possibles sont équiprobables, la probabilité pour que le nombre de voix pour le candidat A ait été strictement supérieur à k fois le nombre de voix pour B tout au long du scrutin vaut $(n - km)/(n + m)$.*

Démonstration. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. On considère un $(n+m)$-uplet $(x_1, \dots, x_{n+m}) \in \left\{-1, \frac{1}{k}\right\}^{n+m}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n+m} x_i = \frac{n}{k} - m,$$

cette quantité étant strictement positive. Chaque x_i correspond à un vote pour le candidat A si $x_i = \frac{1}{k}$ et à un vote pour le candidat B si $x_i = -1$.

On cherche à déterminer le nombre de permutations cycliques de $\{1,\ldots,n+m\}$ satisfaisant
$$\sum_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)} > 0,\ \forall r \in \{1,\ldots,n+m\}.$$
On dira qu'un couple $(i,j) \in \{1,\ldots,n+m\}^2$ est ***défavorable*** si
$$\sum_{s=i+1}^{i+j} x_s = 0 \quad \text{et} \quad \forall i' \in \{i+1,\ldots,i+j-1\}\,,\ \sum_{s=i'+1}^{i+j} x_s < 0,$$
où il est convenu que $\alpha+n+m=\alpha$ pour $\alpha \in \{1,\ldots,n+m\}$. On définit alors une relation d'ordre sur $\{1,\ldots,n+m\}^2$ par
$$(i,j) \leq (i',j') \iff i' \leq i \text{ et } j' \geq j+i-i',$$
ce qui est équivalent à dire que la séquence $(x_i,\ldots,x_{i+j})$ est une sous-séquence de $(x_{i'},\ldots,x_{i'+j'})$. Tout couple défavorable admet un unique majorant maximal parmi les couples défavorables pour cette relation d'ordre, la somme de tous les x_i étant strictement positive. Nous allons montrer que les couples défavorables maximaux définissent des sous-séquences de $\{x_1,\ldots,x_{n+m}\}$ qui sont disjointes. Pour ce faire, montrons que si (i,j) et (i',j') sont défavorables et que si $\{i+1,\ldots,i+j\}\cap\{i'+1,\ldots,i'+j'\} \neq \emptyset$, alors soit $(i,j) \leq (i',j')$, soit $(i',j') \leq (i,j)$.

Le cas $i=i'$ est évident. On peut supposer $i'<i$ sans limiter la généralité. Montrons que sous ces hypothèses, $j' \geq j+i-i'$. On a $i+j \geq i'+1$ et $i'+j' \geq i+1$ car $\{i+1,\ldots,i+j\}\cap\{i'+1,\ldots,i'+j'\} \neq \emptyset$. Ainsi, puisque (i',j') est défavorable, on a :
$$\sum_{s=i+1}^{i'+j'} x_s < 0.$$
Si on avait $i+j > i'+j'$, on aurait $\sum_{s=i'+j'+1}^{i+j} x_s < 0$, et donc $\sum_{s=i+1}^{i+j} x_s < 0$, ce qui contredit le fait que (i,j) est défavorable. On a donc bien $j' \geq i+j-i'$ et donc $(i,j) \leq (i',j')$. On a ainsi montré que si (i,j) et (i',j') sont défavorables maximaux et distincts, alors
$$\{i+1,\ldots,i+j\}\cap\{i'+1,\ldots,i'+j'\} = \emptyset.$$
Soit maintenant $j \in \{1,\ldots,n+m\}$ tel que $x_j=-1$. Puisque
$$\sum_{s=j+1}^{j+n+m} x_s = \sum_{s=1}^{n+m} x_s > 0,$$
il existe nécessairement un $i \in \{j+1,\ldots,j+n+m-2\}$ satisfaisant
$$\sum_{s=i+1}^{j+n+m} x_s = 0 \quad \text{et} \quad \forall i' \in \{i+1,\ldots,j+n+m-1\}\,,\ \sum_{s=i'+1}^{j+n+m} x_s < 0.$$

Et donc j est dans une sous-séquence défavorable maximale. Or si $\sum_{s=i'+1}^{i'+j'} x_s = 0$, on a que

$$\#\{s \in \{i'+1, \dots, i'+j'\} \mid x_s = 1/k\} = k \cdot \#\{s \in \{i'+1, \dots, i'+j'\} \mid x_s = -1\}.$$

Ainsi, puisqu'il y a exactement m indices s tels que $x_s = -1$ et que, comme nous l'avons vu plus haut, chacun est dans une sous-séquence défavorable, il existe exactement km indices s tels que $x_s = 1/k$ qui sont dans une sous-séquence défavorable (on notera qu'il est impossible d'obtenir une séquence défavorable avec uniquement des s tels que $x_s = 1/k$ puisque $1/k$ est positif). Ainsi, il y a exactement $n - km$ indices qui ne sont pas dans une sous-séquence défavorable et à chacun d'eux correspond une permutation cyclique favorable (celle qui commence à cet indice). Or il y a exactement $(n+m)!/(n+m) = (n+m-1)!$ séquences possibles complètes des x_i à permutation cyclique près. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\forall j \leq n+m,\ \sum_{s=1}^{j} x_s > 0\right) &= \frac{1}{(n+m)!}(n+m-1)!(n-km) \\ &= \frac{n-km}{n+m}.\end{aligned}$$

□

Ce théorème fournit en outre une troisième preuve du théorème du scrutin en prenant le cas $k = 1$.

3 Extensions dans le cas discret

Le but de cette section est de proposer diverses variantes du théorème du scrutin, notamment dans le cas où les voix sont des variables aléatoires. Avant d'étendre plusieurs résultats à ce cadre, démontrons une variante du théorème dans une situation où aucune hypothèse probabiliste n'est faite. Il s'agit de la variante qui sera généralisée dans le cas où les voix sont des v.a., et dans le cas de processus stochastiques à temps continu.

3.1 Variante sans hypothèse probabiliste

Théorème 3.1. *Soient $k_1, \dots, k_n$ des entiers supérieurs ou égaux à zéro dont la somme vaut $k \leq n$. Alors parmi les n permutations cycliques de $(k_1, \dots, k_n)$, il y en a exactement $n - k$ pour lesquelles la somme des s premiers éléments est strictement inférieure à s quel que soit $s \in \{1, \dots, n\}$.*

Puisqu'il y a plus de valeurs possibles pour les k_i que dans le théorème **??**, on ne peut appliquer la même méthode.

Démonstration. On pose $k_{r+n} = k_r$ quel que soit $r \in \{1, \dots, n\}$ et on considère $\varphi_r = k_1 + \dots + k_r$. On pose $\varphi_0 = 0$. Soit

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{si } i - \varphi_i > r - \varphi_r \quad \forall i > r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose également
$$\psi_r = \inf\{i - \varphi_i, i \geq r\}.$$
On a alors
$$\delta_r = \psi_{r+1} - \psi_r.$$
Puisque $\varphi_{r+n} = \varphi_r + \varphi_n$ on a que $\delta_{r+n} = \delta_r$ et $\psi_{r+n} = \psi_r + n - k$. Ainsi, parmi les n permutations cycliques de $(k_1, \ldots, k_n)$, il y en a
$$\sum_{r=1}^{n} \delta_r = \psi_{n+1} - \psi_1 = n - k,$$
pour lesquelles la somme des r premiers éléments est strictement inférieure à r quel que soit $r \in \{1, \ldots, n\}$, car si $\delta_r = 1$, on a :
$$\sum_{j=r+1}^{r+s} k_j = \varphi_{r+s} - \varphi_r < r + s - r = s, \quad \forall s \in \{1, \ldots, n\}.$$
□

3.2 Échangeabilité cyclique

Nous allons maintenant démontrer l'analogue du théorème 3.1 dans le cas de variables aléatoires. On peut généraliser ce théorème pour des variables aléatoires satisfaisant la propriété suivante :

Définition 3.1. *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel. On dit qu'il est **cycliquement échangeable** si, pour toute permutation cyclique σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a*
$$(X_1, \ldots, X_n) = (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \quad \text{en loi.}$$

Il s'agit d'une propriété très particulière, intimiment liée au problème du scrutin.

Exemple 3.1. *Si les X_i sont iid, alors trivialement le vecteur aléatoire correspondant est cycliquement échangeable. Il est même **échangeable**, i.e., l'égalité dans la définition d'échangeabilité cyclique est valable quelle que soit la permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ et non plus seulement pour les permutations cycliques.*

On notera toutefois que la notion d'échangeabilité cyclique d'une famille finie de variables aléatoires est plus faible que celle d'indépendance et même loi ; en effet, si on pose $X_i{=}Z$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, où Z est une v.a. réelle quelconque, alors la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est évidemment cycliquement échangeable !

3.3 Extensions aux variables aléatoires

Théorème 3.2. *Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire cycliquement échangeable, où les X_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Posons $S_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$ pour $r \in \{1, \ldots, n\}$. Alors*
$$\mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \in \{1, \ldots, n\} \mid S_n = k) = \begin{cases} \frac{n-k}{n} & \text{si } 0 \leq k < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On pose $X_{n+r} = X_r$ pour tout $r \geq 1$ et on étend la définition de S_r quel que soit $r \geq 1$. On pose $S_0 = 0$. Comme dans la preuve du théorème 3.1, on définit

$$\delta_r = \begin{cases} 1 & \text{si } i - S_i > r - S_r \quad \forall i > r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que les δ_i sont tous de même loi car comme $(X_1, \ldots, X_n)$ est cycliquement échangeable, $S_r - S_i$ ne dépend que de $r - i$. Or on a

$$\delta_0 = \mathbb{1}_{\{S_r < r \ \forall r \in \{1,\ldots,n\}\}},$$

car si $S_n \geq n$, on a $\delta_0 = 0$ par définition de δ_0, et si $S_n = k < n$, alors si on prend $r > n$, on a

$$S_r = S_{r-n} + S_n = S_{r-n} + k,$$

et donc si $(r-n) - S_{r-n} > 0$, alors $r - S_r = r - (S_{r-n} + k) > 0$. On peut ainsi écrire, les δ_i étant de même loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \in \{1, \ldots, n\} \mid S_n) &= \mathbb{E}(\delta_0 \mid S_n) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{r=1}^{n} \delta_r \mid S_n \right) \\ &= \begin{cases} \frac{n - S_n}{n} & \text{si } 0 \leq S_n < n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

car comme dans la preuve du théorème 3.1, $\sum_{r=1}^{n} \delta_n = n - S_n$ si $0 \leq S_n < n$, et 0 sinon. On a ainsi

$$\mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \in \{1, \ldots, n\} \mid S_n = k) = \begin{cases} \frac{n-k}{n} & \text{si } 0 \leq S_n < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

En particulier, la preuve précédente permet de remarquer que

$$\mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \in \{1, \ldots, n\}) = \mathbb{E}\left(\max\left(0, 1 - \frac{S_n}{n}\right)\right),$$

ce qui conduit au résultat suivant dans le cas de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

Théorème 3.3. *Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de moyenne m. Alors*

$$\mathbb{P}\left(S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i < n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \right) = \begin{cases} 1 - m & \textit{si } m < 1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \in \mathbb{N}^*) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \leq n).$$

Or, puisque les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont iid, on a que $(X_1, \ldots, X_n)$ est cycliquement échangeable quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, d'après le théorème précédent

$$\mathbb{P}(S_r < r \quad \forall r \leq n) = \mathbb{E}\left(\max\left(1 - \frac{S_n}{n}, 0\right)\right).$$

Par la loi faible des grands nombres, on sait que

$$\frac{S_n}{n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} m \quad \text{en loi.}$$

Ainsi, puisque la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \max(1 - x, 0)$ est mesurable bornée, on a :

$$\mathbb{E}\left(\max\left(1 - \frac{S_n}{n}, 0\right)\right) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \max(1 - m, 0),$$

ce qui conclut. □

3.4 Application : marche aléatoire asymétrique sur $\mathbb{Z}$

On déduit du paragraphe précédente une application aux marches aléatoires asymétriques :

Théorème 3.4. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires iid valant 1 avec probabilité $p > 1/2$ et -1 avec probabilité $1 - p$. Ainsi, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une marche aléatoire asymétrique sur $\mathbb{Z}$. Alors la probabilité que cette marche aléatoire ne retourne jamais en zéro vaut $2p - 1$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{E}(X_n) = 2p - 1 > 0$, on a par la loi forte des grands nombres que

$$\frac{S_n}{n} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2p - 1 \quad \text{p.s..}$$

Par conséquent, avec probabilité 1, S_n est strictement positive pour n suffisamment grand. On a donc que

$$\mathbb{P}(S_n < 0 \quad \forall n \geq 1) = 0,$$

et donc

$$\mathbb{P}(S_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1) = \mathbb{P}(S_n > 0 \quad \forall n \geq 0).$$

Or S_n est strictement positive si et seulement si $\sum_{i=1}^n (1 - X_i) < n$. On applique alors le théorème **??** à la famille $(1 - X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1) &= \max(1 - \mathbb{E}(1 - X_n), 0) \\
&= 2p - 1.
\end{aligned}$$

□

4 Inversion de Lagrange

Le but de cette section est de donner un exemple d'application d'une extension du théorème du scrutin en théorie des fonctions analytiques. À partir d'une variante du théorème, on établit d'abord la formule de Kemperman, relative au temps d'atteinte d'un niveau strictement négatif d'une marche aléatoire dont les pas sont iid à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2 \ldots\}$. Ce résultat permet d'établir une preuve de la formule d'inversion de Lagrange au moyen de la théorie des probabilités. Puis, on détermine la loi de la population totale d'un processus de Galton-Watson. On verra en effet que la loi en question est nécessairement une inversion de Lagrange, ce qui la déterminera grâce à un argument d'unicité.

4.1 Formule de Kemperman

On commence par démontrer le lemme suivant :

Proposition 4.1. *Soient $k_1, \ldots, k_n \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ tels que $k_1 + \cdots + k_n = -\alpha$, pour un certain $\alpha \in \{0, \ldots, n\}$. On notera $s_i = \sum_{j=1}^{i} k_j$ et $s_i^{(l)} = \sum_{j=l+1}^{l+i} k_j$, avec la convention que $k_{j+n} = k_j$ quel que soit j dans $\{1, \ldots, n\}$ et on désignera par s et $s^{(l)}$ les marches aléatoires correspondantes. On pose*

$$T^{(l)} = \inf\{i \geq 0 \mid s_i^{(l)} = -\alpha\}.$$

Alors le nombre de $l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $T^{(l)} = n$ vaut exactement α.

Démonstration. Il est utile de s'aider d'une représentation graphique. Considérons le premier temps pour lequel la somme des pas est la plus basse, i.e.,

$$s_t = \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} s_i, \text{ avec } s_i > s_t \ \forall i < t.$$

Alors, en considérant la marche $s^{(t)}$, on constate que $T^{(t)} = n$. En effet, si $k \in \{t+1, \ldots, n\}$, alors $s_{k-t}^{(t)} \geq 0$, et si $k \in \{n-t+1, \ldots, n-1\}$, alors $s_k^{(t)} = s_n - (s_t - s_{k+t-n}) > -\alpha$.

On remplace la marche initiale s par $s^{(t)}$, ce qui ne change rien au problème, puisque l'ensemble $\{s^{(l)}\}_{l \in \{1, \ldots, n\}}$ coïncide avec l'ensemble $\{(s^{(t)})^{(l)}\}_{l \in \{1, \ldots, n\}}$. On remarque alors que le niveau $-\alpha$ est atteint pour la première fois au temps n par une marche $s^{(l)}$ si et seulement si on fait débuter celle-ci à l'un des temps où la marche $s = s^{(t)}$ atteint le niveau $-j$ pour la première fois, et ce pour chaque $1 \leq j \leq k$, ce qui donne exactement α marches satisfaisant la propriété voulue. □

On utilise cette proposition pour démontrer la formule de Kemperman :

Théorème 4.1 (Formule de Kemperman)**.** *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires cycliquement échangeables à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ et soit $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$. On pose*

$$T_k = \inf\{i > 0 : S_i = -k\}.$$

Alors on a

$$\mathbb{P}(T_k = n) = \frac{k}{n}\, \mathbb{P}(S_n = -k).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_k = n) &= \mathbb{P}(S_1 > -k, \dots, S_{n-1} > -k, S_n = -k) \\ &= \mathbb{P}(S_1 > -k, \dots, S_{n-1} > -k \mid S_n = -k)\mathbb{P}(S_n = -k).\end{aligned}$$

Désignons par Σ l'ensemble des permutations cycliques de $\{1, \dots, n\}$. En notant $a = (a_1, \dots, a_n)$, on pose alors

$$A = \left\{ a \in \{-1, 0, 1, \dots\}^n \mid \forall 1 \leq r \leq n-1, \sum_{i=1}^{r} a_i > -k, \sum_{i=1}^{n} a_i = -k \right\}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(T_k = n)}{\mathbb{P}(S_n = -k)} &= \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n \mid S_n = -k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{a \in A} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{P}(X_{\sigma(1)} = a_1, \dots, X_{\sigma(n)} = a_n \mid S_n = -k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{P}((X_{\sigma(i)})_i \in A \mid S_n = -k).\end{aligned}$$

Par le lemme précédent on obtient que $\mathbb{P}((X_{\sigma(i)})_i \in A \mid S_n = -k) = k/n$ ce qui conclut, puisque Σ a exactement n éléments. $\square$

4.2 Formule d'inversion de Lagrange

La formule de Kemperman donne un moyen de fournir une preuve "probabiliste" de la formule d'inversion de Lagrange, qui est présentée ici. Pour simplifier, on se limitera aux fonctions génératrices, qui suffisent pour la suite. Il est néanmoins possible d'étendre le résultat aux fonctions analytiques en général.

Théorème 4.2 (Formule d'inversion de Lagrange)**.** *Soit g une fonction analytique au voisinage de 0, avec $g(0) \neq 0$, et telle que g s'écrive*

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i,$$

avec $\sum_i p_i = 1$ (i.e., g est une fonction génératrice de probabilité). Alors il existe une unique fonction analytique au voisinage de 0, notée h, solution de l'équation

$$h(z) = zg(h(z)),$$

dont on écrira le développement $h(z) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i$ et elle satisfait les égalités

$$[h(z)^k]_n = [\frac{k}{n} g(z)^n]_{n-k} \quad \forall k, n \in \mathbb{N},$$

où $[.]_i$ désigne le coefficient de z^i dans le développement en série entière de la fonction considérée.

Démonstration. Dans la mesure où l'existence et l'unicité peuvent être immédiatement déduites du théorème des fonctions implicites, l'intérêt consiste à voir que la fonction satisfaisant l'équation fonctionnelle est bien analytique et qu'elle vérifie la formule susmentionnée.

Quel que soit n dans $\mathbb{N}$, considérons une variable aléatoire ξ telle que $\mathbb{P}(\xi = n-1) = p_n$. En utilisant une famille indépendante de telles v.a. et en les sommant, on obtient ainsi une marche aléatoire dont les pas sont iid à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. On notera que la condition $g(0) \neq 0$ implique que $\mathbb{P}(\xi = -1) \neq 0$, ce qui sera indispensable, comme on s'en doute, pour appliquer ensuite la formule de Kemperman. On pose

$$T_k = \inf\{n \geq 0 : S_n = -k\},$$

pour $0 \leq k \leq n$. Alors en posant $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(T_1 = n)$, on montre que h est la solution de l'énoncé du théorème de Lagrange. En effet, considérons une marche aléatoire de mêmes pas que ci-dessus mais partant de 1 à l'instant 0. Elle se trouvera donc en $\xi + 1$ à l'instant 1. Alors le premier temps où la marche retournera en zéro, qui vaut $1 + T'_{\xi+1}$ par propriété de Markov faible, où T' est défini comme T mais à partir d'une marche aléatoire S'_n indépendante de S_n, est égal en loi au premier temps auquel la marche initale se retrouve en -1 (puisque la seconde marche est partie de 1 et se retrouve pour la première fois en 0, avec les mêmes v.a. iid comme pas que la marche initiale). Ainsi on peut écrire

$$T_1 = 1 + T'_{\xi+1} \quad \text{en loi}$$

Par propriété de Markov (forte cette fois-ci), on a pour $0 \leq k \leq n$:

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} T_1^{(i)} \quad \text{en loi}$$

où les $T_1^{(i)}$ sont indépendants et de même loi que T_1 et T'_1. De plus T'_i est indépendant de ξ par propriété de Markov faible. On a alors :

$$\begin{aligned}
h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(T_1 = n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(T'_{\xi+1} = n-1) \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(T'_{\xi+1} = n) = z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{\infty} \ \mathbb{P}(\xi + 1 = i, T'_i = n) \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{\infty} \ \mathbb{P}(\xi + 1 = i) \ \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{i} T_1^{(j)} = n\right).
\end{aligned}$$

On pose alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i,n} = \left\{a = (a_1, \ldots, a_i) \in (\mathbb{N}^*)^i \mid \sum_{j=1}^{i} a_i = n\right\}$ et on a ainsi

$$\begin{aligned} h(z) &= z \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{a \in A_{i,n}} \mathbb{P}(\xi + 1 = i) \prod_{j=1}^{i} z^{a_j} \ \mathbb{P}(T_1^{(j)} = a_j) \\ &= z \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \ \mathbb{P}(T_1 = k) \right)^i \mathbb{P}(\xi + 1 = i) \\ &= z g(h(z)). \end{aligned}$$

Notons que h ainsi définie est bien analytique au voisinage de zéro. On vérifie, en utilisant à nouveau la propriété de Markov forte, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(T_k = n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(T_1 = n) \right)^k = h(z)^k.$$

Cette dernière relation ainsi que la formule de Kempermann donnent alors la relation voulue par un petit calcul. On peut ainsi déterminer les coefficients de h à partir de ceux de g.

□

4.3 Application : processus de branchement et Formule d'Otter-Dwass

On rappelle la définition du processus de Galton-Watson :

Définition 4.1. *Soit* $(\xi_{j,n})_{j \geq 1, n \geq 0}$ *une famille de v.a. à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *On pose* $X_0 = 1$ *et on pose par récurrence*

$$X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{j,n}.$$

On définit ainsi un processus de branchement appelé processus de Galton-Watson.

D'une manière plus générale, on peut considérer plusieurs processus indépendants correspondant à plusieurs arbres. On parle ainsi d'arbres de Galton-Watson. Le problème qui nous intéresse ici est le calcul de la loi de la population totale d'un tel processus avec k individus initiaux, c'est-à-dire correspondant à k arbres de Galton-Watson indépendants. On notera $\#\mathcal{F}_k$ la population totale.

L'inversion de Lagrange permet en outre de déterminer la loi de $\#\mathcal{F}_k$. La démarche est essentiellement la même que celle utilisée dans la démonstration de la formule d'inversion de Lagrange : il s'agit de vérifier que la fonction

$$h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_1 = n)$$

satisfait l'équation fonctionnelle de l'inversion de Lagrange et que de plus on a $(h(z))^k = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_k = n)$. L'unicité de la solution dans l'inversion de Lagrange permettra alors de conclure.

Etant donné un arbre de Galton-Watson, on peut numéroter sa population selon la date de naissance. On notera ainsi n_i le nombre de fils du $i$ème individu. On remarque que si l'on supprime l'individu initial, on obtient n_1 nouveaux arbres de Galton-Watson, indépendants. On peut ainsi écrire :

$$\mathbb{P}(\#\mathcal{F}_1 = n) = \mathbb{P}(\#\mathcal{F}'_\xi + 1 = n) = \mathbb{P}(\#\mathcal{F}'_\xi = n - 1),$$

où l'ajout d'un individu provient du fait que l'on a supprimé l'individu initial. On peut ainsi écrire $h(z)$ par le développement suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_1 = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}'_\xi = n-1) \\
&= z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}'_\xi = n) \\
&= z \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_1 = n) \right)^i \mathbb{P}(\xi = i),
\end{aligned}$$

En répétant les calculs de la démonstration de la formule d'inversion de Lagrange. On en déduit que h satisfait l'égalité du théorème de Lagrange. C'est donc une inversion de Lagrange. De plus, on a également

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_k = n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ \mathbb{P}(\#\mathcal{F}_1 = n) \right)^k$$

puisque $\#\mathcal{F}_k$ est la somme des populations des k arbres qui sont indépendantes et de même loi (à savoir la loi de $\#\mathcal{F}_1$). Par unicité de la solution de l'inversion de Lagrange, on a donc nécessairement

$$\mathbb{P}(\#\mathcal{F}_k = n) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(S_n = -k)$$

en appliquant la formule de Kemperman, où S_n est une marche aléatoire avec des pas iid de loi $\xi - 1$, à valeurs dans $\{-1, 0, 1, \ldots\}$, $1 \leq k \leq n$. Cette relation est connue sous le nom de **formule d'Otter-Dwass**.

Remarque. Il existe en fait une manière simple et particulièrement intéressante de voir ce résultat sans avoir recours à l'inversion de Lagrange, dans le cas où la population totale est finie presque sûrement. On peut en effet simplement exhiber une bijection entre les marches aléatoires se trouvant pour la première fois en $-k$ à l'instant p et les processus de Galton-Watson à k individus initiaux et p individus au total. On numérote les individus arbre après arbre, et dans chaque arbre selon la date de naissance. On note n_i le nombre de fils du $i$ème individu. On obtient ainsi une suite de nombres positifs

$$(n_1, n_2, \ldots, n_p).$$

Il suffit alors de considérer la somme des $(n_i - 1)$, ce qui donne une marche se situant pour la première fois en $-k$ au "temps" p, puisqu'on omet les k individus initiaux. Réciproquement, étant donnée une suite finie satisfaisant ces hypothèses, on trouve un unique arbre de Galton-Watson à k individus initiaux et à population totale p.

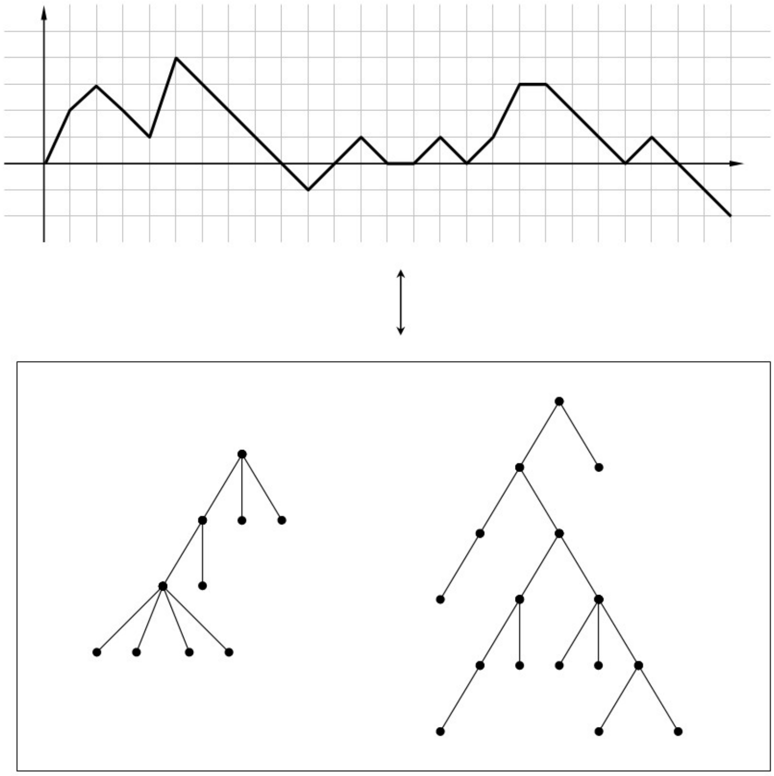


FIGURE 2 – Une marche aléatoire jusqu'au premier temps d'atteinte de -2 et la forêt de Galton-Watson correspondante.

5 Introduction au cas continu

Le but de cette section est d'introduire certains analogues de théorèmes de la section 3 mais dans le cas des processus stochastiques à temps continu. Pour ce faire, on introduira un équivalent de l'échangeabilité cyclique ainsi qu'une notion propre au cas continu, celle de *séparabilité*.

Définition 5.1. *Soit $(X_t)_{0 \le t \le T}$ une famille de variables aléatoires, où T est un réel strictement positif. On dit que $(X_t)_{0 \le t \le T}$ est **à variations cycliquement échangeables** si $\forall n \ge 2$, le vecteur aléatoire*

$$(X_{T/n} - X_0, \dots, X_T - X_{(n-1)T/n})$$

est cycliquement échangeable au sens défini à la section précédente.

Définition 5.2. *Un processus stochastique $(X_t)_{0\le t\le T}$ à valeurs réelles est dit* ***séparable*** *s'il existe deux parties dénombrables S^+ et S^- de $[0,T]$ telles que pour tout intervalle ouvert I de $[0,T]$ p.s. $\sup_{t\in S^+\cap I} X_t = \sup_{t\in I} X_t$ et $\inf_{t\in S^-\cap I} X_t = \inf_{t\in I} X_t$.*

L'hypothèse de séparabilité va servir à s'assurer que certains ensembles sont bien mesurables. En effet, la classe des parties mesurables est stable par réunions et intersections dénombrables, mais pas quelconques. Pour des propriétés comme des majorations qui ne dépendent pas que des valeurs du processus en un nombre dénombrable de points, l'hypothèse de séparabilité va nous permettre malgré cela de conclure.

Théorème 5.1. *Soit $(X_t)_{0\le t\le T}$ un processus stochastique à valeurs réelles, séparable, à variations cycliquement échangeables sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et tel que pour presque tout $\omega\in\Omega$, $X_t(\omega)$ est une fonction croissante, en escalier, et vérifiant $X_0(\omega)=0$. Alors*

$$\mathbb{P}(X_t\le t\quad \forall t\in[0,T]\mid X_T=r)=\begin{cases}\frac{T-r}{T} & si\ 0\le r\le T,\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Démonstration. La preuve fonctionne sur le même principe que celle du théorème 3.2. Elle repose sur le résultat analytique suivant, démontré en annexe :

Théorème 5.2. *Soit $\phi:[0,T]\to\mathbb{R}$ une fonction croissante, en escalier, vérifiant $\phi(0)=0$. On prolonge ϕ à $[0,\infty[$ en posant*

$$\phi(t+T)=\phi(t)+\phi(T)\quad \forall t\ge 0,$$

et on pose

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & si\ s-\phi(s)\ge t-\phi(t)\ \forall s\ge t,\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Alors

$$\int_0^T \delta(t)dt=\begin{cases}T-\phi(T) & si\ \phi(T)<T,\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

On prolonge alors (X_t) à $[0,\infty[$ en posant $X_{T+t}=X_T+X_t$ quel que soit $t\ge 0$ et on pose

$$\delta(t)=\begin{cases}1 & \text{si } X_s-X_t\le s-t\ \forall s\ge t,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors $\delta(t)$ est une variable aléatoire (car (X_t) est séparable) et on admettra que sa loi ne dépend pas de t. On a

$$\delta(0)=\mathbb{1}_{\{X_t\le t\quad \forall t\in[0,T]\}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t\le t\quad \forall t\in[0,T]\mid X_T) &= \mathbb{E}(\delta(0)\mid X_T)\\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\delta(t)dt\mid X_T\right)\\ &= \begin{cases}1-\frac{X_T}{T} & \text{si } 0\le X_T\le T,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}\end{aligned}$$

en appliquant le théorème. Ceci conclut.

□

On peut en déduire le résultat suivant :

Théorème 5.3. *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus stochastique à valeurs réelles, séparable, à variations cycliquement échangeables sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et tel que pour presque tout* $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ *est une fonction croissante, en escalier, et vérifiant* $X_0(\omega) = 0$. *Alors*

$$\mathbb{P}(X_t \leq t \quad \forall t \in [0,T]) = \mathbb{E}\left(\max\left(1 - \frac{X_T}{T}, 0\right)\right).$$

6 Annexe

6.1 Démonstration du théorème 5.2

Nous donnons la preuve du théorème analytique 5.2

Preuve du théorème 5.2. Si $\phi(T) > T$, alors $\delta(t) = 0$ $\forall t \geq 0$, et le résultat est alors évident.

Supposons maintenant que $\phi(T) \leq T$. On pose alors

$$\psi(t) = \inf\{s - \phi(s), s \geq t\}$$

Comme $\phi(T+t) = \phi(T) + \phi(t)$ $\forall t \geq 0$, on a que $\psi(T+t) = \psi(t) + T - \phi(T)$ $\forall t \geq 0$.

Si $0 \leq s \leq t$, $0 \leq \psi(t) - \psi(s) \leq t - s$. Par conséquent, ψ est absolument continue. Le théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale de Lebesgue nous dit alors que ψ est dérivable presque partout, et que

$$\int_0^T \psi'(t)dt = \psi(T) - \psi(0) = T - \phi(T)$$

De plus, $0 \leq \psi'(t) \leq 1$.

Nous allons maintenant montrer que $\psi' = \delta$ presque partout, ce qui achèvera la preuve du théorème.

On remarque tout d'abord que $\delta(t) = 1$ si et seulement si $\psi(t) = t - \phi(t)$. De plus, on a que $\forall t \geq 0$, $\psi(t) \leq t - \phi(t)$, que ϕ est presque partout continue et que ϕ' existe et est nulle presque partout.

Montrons d'abord que $\psi' \leq \delta$ presque partout. Si $\psi'(t)$ existe et vaut 0, alors l'inégalité est trivialement vraie. Si $\psi'(t)$ existe et est strictement positif, alors $\psi(s) > \psi(t)$ $\forall s > t$, et donc $\forall s > t$, $\psi(t) = \inf\{r - \phi(r), r \in [t,s]\}$. Ceci montre que $t - \phi(s) \leq \psi(t) \leq t - \phi(t)$. Si on suppose de plus que ϕ est continue à droite en t, en faisant tendre s vers t, on obtient que $\psi(t) = t - \phi(t)$, et donc que $\delta(t) = 1$. Comme $\psi'(t) \leq 1$, on a que $\psi' \leq \delta$ presque partout.

Montrons maintenant l'inégalité inverse. Si $\delta(t) = 0$ et $\psi'(t)$ existe, on a immédiatement : $\delta(t) \leq \psi'(t)$. Posons

$$D = \{t \in [0, +\infty[, \delta(t) = 1\}.$$

Les points isolés de D sont dénombrables. Soit t un point d'accumulation de D tel que $\delta(t) = 1$, $\psi'(t)$ existe et que $\phi'(t) = 0$. Il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D telle que t_n tende vers t et $t_n \neq t$ $\forall n$. Alors $\psi(t) = t - \phi(t)$ et $\psi(t_n) = t_n - \phi(t_n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\psi'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(t) - \psi(t_n)}{t - t_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{\phi(t) - \phi(t_n)}{t - t_n} = 1 - \phi'(t) = 1.$$

Donc $\delta(t) \leq \psi'(t)$ pour presque tout t. Donc $\psi' = \delta$ presque partout, ce qui conclut.

$\square$

Références

[1] L. Addario-Berry and B. A. Reed, *Ballot theorems, old and new*, 2007. Disponible à l'adresse `http://www.dms.umontreal.ca/~addario/papers/btsurvey.pdf`. Consulté en février 2009. ↑

[2] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Processes, Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 2008. ↑

[3] L. Takacs, *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967. ↑