

Représentations du groupe symétrique et probabilités libres.

Valentin Féray
mémoire de magistère encadré par Philippe Biane

12 octobre 2006

Table des matières

1 Représentations du groupe symétrique	2
1.1 Représentations de groupes finis	2
1.2 Représentations irréductibles du groupe symétrique	3
1.3 Opérations sur les représentations	4
1.4 Problèmes	5
2 Introduction aux probabilités libres	5
2.1 Algèbres de Von Neumann	5
2.2 Cumulants libres	6
2.3 Partitions non croisées	7
3 Comportement asymptotique des caractères du groupe symétrique	7
3.1 Lien entre les deux théories	7
3.2 Valeurs des caractères	8
3.3 Décompositions asymptotiques de représentations	8
4 Polynômes de Kerov	9
4.1 Une formule exacte	9
4.2 Calcul des coefficients	9

1 Représentations du groupe symétrique

Cette partie présente rapidement les principaux résultats classiques de la théorie des représentations des groupes finis en général, ainsi que des résultats spécifiques au cas du groupe symétrique d'autre part. Aucune démonstration n'est reprise ici. Pour plus de détails sur certains résultats et leur preuve, consulter [Sa].

1.1 Représentations de groupes finis

Définition 1.1. Soit G un groupe. On appelle représentation de G tout couple (V, ρ) où V est un espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de G dans $GL(V)$. On appelle caractère de la représentation la fonction χ_ρ (on sous-entend V dans cette notation) de G dans \mathbb{R} qui, à un élément g , associe $\text{tr}(\rho(g))$. La somme de deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) du même groupe G est alors la représentation (V, ρ) où

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus V_2; \\ \forall g \in G, \rho(g) &= \rho_1(g) \oplus \rho_2(g). \end{aligned}$$

Notons que le caractère de la somme de deux représentations est la somme des caractères. Si (V, ρ) est la somme de deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) , alors V_1 et V_2 sont des sous-espaces de V stables par tous les $\rho(g)$. Une représentation telle que V n'ait pas de sous-espace non trivial stable par les $\rho(g)$ est dite irréductible. En particulier, une telle représentation ne peut s'écrire de manière non triviale comme somme de deux représentations. La réciproque est fautive en général, mais dans le cas des groupes finis (on se placera désormais dans ce contexte), on a le résultat suivant :

Théorème 1.2 (Maschke). *Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation de G telle qu'il existe $V_1 \subset V$ stable par tous les $\rho(g)$. Alors il existe V_2 , supplémentaire de V_1 dans V stable par tous les $\rho(g)$. Par conséquent, toute représentation de G peut être décomposée en une somme de représentations irréductibles.*

Cette décomposition est alors unique à l'ordre des facteurs près. Si \mathbb{C} est le corps de base (hypothèse que l'on fera désormais), la théorie des caractères donne une jolie formule pour la calculer. Si φ et ψ sont deux fonctions de G dans \mathbb{R} , notons

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \cdot \overline{\psi(g)}.$$

C'est évidemment un produit scalaire sur l'ensemble de ces fonctions.

Théorème 1.3. *Si l'on considère le sous-espace des fonctions centrales (i.e. constantes sur les classes de conjugaison) au quel appartiennent les caractères, la famille des caractères des représentations irréductibles (à isomorphisme près) en forme une base orthogonale.*

Corollaire 1.4. *Le nombre de représentations irréductibles à isomorphismes près est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe. De plus si*

$$(V, \rho) = m_1(V_1, \rho_1) \oplus \dots \oplus m_n(V_n, \rho_n)$$

où les (V_i, ρ_i) sont irréductibles 2 à 2 non isomorphes, alors

$$\forall i, m_i = \langle \chi_\rho, \chi_{V_i} \rangle$$

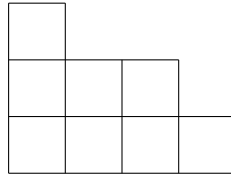
Deux représentations sont donc isomorphes ssi elles ont le même caractère.

Il suffit donc de classifier les représentations irréductibles et d'évaluer leur caractère. Pour cela, l'étude se fait groupe par groupe, les seuls résultats généraux étant leur nombre et la formule

$$\sum_{(V, \rho) \text{ repr. irr.}} (\dim V)^2 = |G|$$

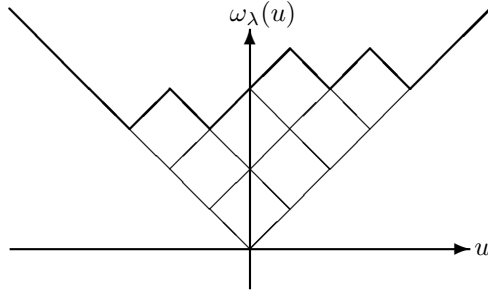
1.2 Représentations irréductibles du groupe symétrique

Les classes de conjugaison de S_q sont en bijection avec les partitions de q , c'est-à-dire les suites décroissantes d'entiers presque nulles de somme q . Le nombre de représentations irréductibles de S_q est donc égal à celui des partitions de q . En fait, il existe une construction associant à toute partition $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$ de q une représentation de S_q . Cette construction demande de regarder une partition sous la forme d'un diagramme de Young :



$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = \dots = 0,$$

la première colonne contenant λ_1 carrés, la seconde λ_2 , etc... Un diagramme peut aussi être codé par la fonction affine par morceaux obtenue en le tournant de 45° vers la gauche et en ne gardant que la ligne brisée la plus haute (après avoir divisé l'unité par $\sqrt{2}$ pour que les maxima et minima soient obtenus en des points entiers). On obtient une fonction ω_λ de u continue affine par morceaux, 1-Lipschitzienne et égale à $|u|$ en dehors d'un intervalle compact. On notera respectivement x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_{n-1} les suites ordonnées de ses minima et maxima locaux.



$$x_1 = -3 < y_1 = -2 < x_2 = -1 < y_2 = 1 < x_3 = 2 < y_3 = 3 < x_4 = 4$$

Cela permet de définir la notion de forme limite pour des diagrammes de Young renormalisés (i.e. où on a transformé le graphe de la fonction par une homothétie) comme la convergence uniforme des fonctions associées.

Si λ est une partition, la dimension de la représentation correspondante peut être exprimée par le dénombrement d'un objet : les numérotations des cases du diagramme avec les nombres de 1 à q (utilisés chacun une fois) telles que chaque ligne et chaque colonne soit croissante. On notera χ_λ le caractère normalisé ($\chi_\lambda(1) = 1$) de la représentation correspondante. Il existe une règle (due à F.D. Murnaghan et T. Nakayama, voir [Sa] 4.10) permettant de calculer par récurrence sa valeur sur une classe de conjugaison donnée mais il n'y a pas de formule explicite.

1.3 Opérations sur les représentations

On présente ici plusieurs manières de construire des représentations.

- Soit G un groupe fini, $H \subset G$ un sous-groupe et (V, ρ) une représentation de G . $(V, \rho|_H)$ est alors une représentation de H appelée représentation restreinte et notée $\rho \downarrow_H$. Elle peut être réductible même si (V, ρ) est irréductible.
- Si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont deux représentations respectivement de G_1 et G_2 , alors $(V_1 \otimes V_2, \rho)$ où $\rho(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$ est une représentation de $G_1 \times G_2$, appelée produit tensoriel des deux représentations (qui est irréductible si les deux représentations de départ le sont). Si $G_1 = G_2 = G$, cette représentation peut être restreinte à la diagonale $\Delta(G \times G) \simeq G$.
- Soit G un groupe fini, $H \subset G$ un sous-groupe et (V, ρ) une représentation de H . Alors la représentation définie (à équivalence près) par le caractère

$$\chi(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{g' \in G \\ \text{tel que } g'^{-1}gg' \in H}} \chi_\rho(g'^{-1}gg')$$

est appelée représentation induite sur G par ρ et notée $\rho \uparrow^G$. En terme de catégorie, les foncteurs *Ind* et *Res* sont adjoints, ce qui justifie la définition un peu parachutée de ce caractère.

1.4 Problèmes

Les résultats classiques présentés en 1.2. ne permettent pas de mener facilement des calculs mettant en jeu plusieurs représentations à la fois. Voici quelques questions que seuls les outils présentés dans la suite du mémoire ont permis de résoudre.

1. Prenons une suite de diagrammes de Young λ_n dont la taille tend vers l'infini et telle que ces diagrammes renormalisés (de telle sorte que leur aire soit 1)¹ aient une forme limite. À chacun de ces diagrammes correspond un caractère normalisé χ_{λ_n} défini sur $S_{|\lambda_n|}$. Prenons une permutation σ dans S_Q . Dans chaque groupe $S_q (q \geq Q)$, on peut trouver un élément σ_q ayant la même décomposition en cycles que σ (avec des singletons en plus). On sait que $\chi_{\lambda_n}(\sigma_{|\lambda_n|})$ tend alors vers 0. Y a-t-il un équivalent simple ?
2. Les S_q formant une suite croissante, on peut restreindre une représentation irréductible de S_{q_2} à S_{q_1} ($q_1 \leq q_2$). Pour $q_1 = q_2 - 1$, il existe une règle très simple donnant la décomposition de cette représentation restreinte en composantes irréductibles. Mais que peut-on dire pour $q_1 = q_2/2$? Même question pour une représentation irréductible de S_{q_1} induite à S_{q_2} ou pour un produit tensoriel de représentations de S_q vu comme représentation de $S_q \simeq \Delta(S_q \times S_q) \subset S_q \times S_q$.

2 Introduction aux probabilités libres

Nous présentons ici le cadre général des probabilités libres, puis les objets venant de cette théorie que l'on va utiliser dans ce mémoire : les cumulants libres. Les principaux résultats sont résumés dans [B1].

2.1 Algèbres de Von Neumann

Définition 2.1. Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{B}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H . Une algèbre de Von Neumann est une sous-algèbre involutive unitaire de $\mathcal{B}(H)$ égale à son bicommutant.

Ces algèbres, initialement étudiées par Murray et Von Neumann, ont de très belles propriétés dont l'existence d'éléments positifs et d'un calcul fonctionnel borélien.

Exemple : Si (Ω, \mathcal{T}, m) est un espace mesuré, $L^\infty(\Omega, \mathcal{T}, m) \subset B(L^2(\Omega, \mathcal{T}, m))$ est une algèbre de Von-Neumann commutative.

Réciproquement, toute algèbre de Von Neumann commutative est de cette forme. Or, pour m mesure de probabilité, $L^\infty(\Omega, \mathcal{T}, m)$ muni de la forme linéaire donnée par l'intégrale détermine entièrement l'espace de probabilité sous-jacent. On a donc une extension naturelle de la théorie des probabilités :

¹Si on renormalise en divisant par $|\lambda_n|$, cela permet d'étudier les représentations du groupe symétrique infini étudiées par A.M. Vershik et S.V. Kerov.

Définition 2.2. On appellera espace de probabilités non commutatif un couple (\mathcal{A}, φ) où

- \mathcal{A} est une algèbre de Von-Neumann ;
- φ est un état tracial fidèle sur \mathcal{A} , *i.e.* une forme linéaire vérifiant :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}, \quad \varphi(xy) = \varphi(yx), \quad \varphi(x^*x) > 0 \text{ si } x \neq 0.$$

Les éléments de \mathcal{A} sont alors appelés variables aléatoires.

Le théorème de calcul fonctionnel borélien permet d'associer aux éléments auto-adjoints de \mathcal{A} une mesure spectrale sur \mathbb{R} (mesure de probabilité à support compact). Ceci renforce l'envie d'étudier ces espaces avec le langage probabiliste. D.V. Voiculescu, au début des années 80, a ainsi d'établir certains résultats sur la classification de ces espaces, mais aussi sur les matrices aléatoires de grandes tailles.

2.2 Cumulants libres

L'étude de certaines algèbres de Von Neumann a amené à définir la liberté de sous-algèbres unitaires de \mathcal{A}

Définition 2.3. Soient (\mathcal{A}, φ) un espace de probabilités non commutatif et $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ des sous-algèbres unitaires de \mathcal{A} , on dit que les \mathcal{B}_i sont libres dans (\mathcal{A}, φ) si, pour tout choix $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A}$ tels que $\varphi(b_k) = 0$ et $b_k \in \mathcal{B}_{i_k}$ avec $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$, on a

$$\varphi(b_1 \dots b_n) = 0.$$

Une famille de variables aléatoires est dite libre si les sous-algèbres unitaires involutives qu'elles engendrent sont libres.

Cette notion peut-être comparé à celle d'indépendance. La convolution a alors un équivalent libre :

Définition - Proposition 2.4. Soient X et Y deux variables aléatoires auto-adjointes et libres dans un espace de probabilités non commutatif. Notons \mathfrak{l} et \mathfrak{m} les mesures spectrales respectives de X et Y . La mesure spectrale de $X + Y$ ne dépend alors que de \mathfrak{l} et \mathfrak{m} et est appelée convolution libre de \mathfrak{l} et \mathfrak{m} et notée $\mathfrak{l} \boxplus \mathfrak{m}$. L'opérateur \boxplus définit alors une loi associative commutative sur l'ensemble des mesures de probabilité à support compact sur \mathbb{R} .

La proposition suivante permet de la calculer :

Proposition 2.5. Soit \mathfrak{m} une mesure de probabilité sur \mathbb{R} à support compact. Notons

$$G_{\mathfrak{m}}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\zeta - x} \mathfrak{m}(dx).$$

C'est une fonction holomorphe sur \mathbb{C}/\mathbb{R} , qui admet un développement asymptotique au voisinage de l'infini (en puissance négative de ζ) qui est inversible au

sens de la composition (son premier terme est $\frac{1}{\zeta}$). Son inverse s'écrit alors

$$K_{\mathbf{m}}(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\mathbf{m})\zeta^{k-1}.$$

Les R_k sont alors appelés cumulants libres de \mathbf{m} et vérifient

$$R_k(\mathbf{m} \boxplus \mathbf{l}) = R_k(\mathbf{m}) + R_k(\mathbf{l}).$$

2.3 Partitions non croisées

Définition 2.6. Une partition est croisée s'il existe $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ tels que $\{i_1; i_3\}$ et $\{i_2; i_4\}$ soient inclus dans deux parties différentes de la partition. L'ensemble des partitions non croisées de n est noté $NC(n)$.

R.Speicher a démontré la formule suivante liant les cumulants libres aux moments :

$$M_n = \sum_{\pi=(\pi_1, \dots, \pi_r) \in NC(n)} \prod_{i=1}^r R_{|\pi_i|}.$$

Un lien avec le groupe symétrique apparaît alors : on a une injection de l'ensemble des partitions non croisées dans le groupe symétrique. L'image de $NC(q)$ se lit facilement sur le graphe de Cayley de S_q muni de la famille génératrice $(ij)_{1 \leq i < j \leq q}$. Ce sont les éléments appartenant à une géodésique entre e et $(12 \dots q)$.

3 Comportement asymptotique des caractères du groupe symétrique

3.1 Lien entre les deux théories

À chaque diagramme de Young λ , on peut associer une mesure sur \mathbb{R} , appelée mesure de transition² \mathbf{m}_λ par la formule

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{m}_\lambda}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta} \exp \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega'_\lambda(x) - \text{sgn}(x)}{2(x - \zeta)} dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{x_k}, \end{aligned}$$

où α_k est la dimension de la représentation de S_{q+1} associée au diagramme λ au quel on a ajouté une case au coin x_k .

La première forme permet de définir cette mesure pour tout élément de l'adhérence des diagrammes de Young renormalisés vus comme fonctions (c.f.

²introduite par S.V. Kerov dans [K].

1.2). Quant à la seconde, l'idée est de voir cette mesure comme la mesure spectrale d'un élément dans un espace de probabilités non commutatif (proposition 3.3 de [B1]). Les moments de cette mesure peuvent alors être calculés de deux façons : soit en fonction de ses cumulants libres (que l'on notera $R_n(\lambda)$), soit directement en faisant intervenir les valeurs des caractères.

3.2 Valeurs des caractères

P.Biane a ainsi répondu dans [B1] à la question posée dans le premier paragraphe.

Théorème 3.1. *Quels que soient le réel $A > 1$ et l'entier $k > 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout q , pour tout diagramme de Young λ de taille q , de hauteur et largeur inférieures à $A\sqrt{q}$ et pour toute permutation $\sigma \in S_q$ de longueur³ $|\sigma| \leq k$, on a :*

$$\left| \chi_\lambda(\sigma) - \prod_{c|\sigma} q^{-|c|-1} R_{|c|+2}(\lambda) \right| \leq K|\lambda|^{-1-\sigma/2},$$

le produit étant effectué sur les cycles de la décomposition en cycles de supports disjoints de σ .

Dans le cas d'une suite de diagrammes de Young admettant après renormalisation une forme limite ω , on peut trouver un A pour appliquer ce théorème et les $R_k(\lambda_n)$ sont équivalents (quand n tend vers l'infini) à $R_k(\omega) \cdot |\lambda_n|^{k/2}$. Le théorème permet donc de montrer que

$$\chi_{\lambda_n}(\sigma_n) \sim R_k(\omega) |\lambda_n|^{|\sigma|/2}.$$

3.3 Décompositions asymptotiques de représentations

Les mêmes méthodes et ce théorème permettent aussi d'étudier asymptotiquement les restrictions, inductions et produits tensoriels de représentations de groupes symétriques. Presque tous les diagrammes de Young de la représentation obtenue ont une forme proche d'une forme donnée, que l'on peut calculer grâce aux cumulants libres. Plus, précisément, dans le cas d'un produit tensoriel induit, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Quels que soient les réels $A > 1$, $\varepsilon, \delta > 0$, il existe un entier q_0 tel que, quel que soit $q \geq q_0$, pour tout diagramme de hauteur et largeur inférieures à $A\sqrt{q}$ et de taille supérieure à q , le sous-espace de la représentation $\rho_\lambda \otimes \rho_\mu \uparrow^{S^{|\lambda|+|\mu|}}$ engendré par les représentations isomorphes à une représentation irréductible ρ_ν telle que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega_\nu(x) - \omega_{\lambda \boxplus \mu}(x)| \leq \varepsilon \sqrt{q},$$

³La longueur d'une permutation est sa distance à e dans le graphe de Cayley cité ci-dessus.

a une dimension supérieure à $(1 - \delta) \cdot \dim(\rho_\lambda \otimes \rho_\mu \uparrow^{S_{|\lambda|+|\mu|}})$, $\omega_{\lambda \boxplus \mu}$ étant la fonction 1-Lipschitzienne valant $|u|$ en dehors d'un intervalle compact dont les cumulants libres sont la somme de ceux de λ et de μ .

Notons que la borne en $\varepsilon\sqrt{q}$ donne une convergence uniforme si l'on regarde une suite de diagrammes renormalisés, ce qui équivaut à la convergence simple des moments. On a des résultats similaires pour la restriction et le produit tensoriel (restreint à la diagonale). Ce dernier est remarquable car la forme limite ne dépend pas des représentations prises au départ. Pour les énoncés précis et démonstrations, se reporter à [B1].

4 Polynômes de Kerov

4.1 Une formule exacte

En fait, les cumulants libres permettent d'obtenir un résultat plus précis que le comportement asymptotique. S.V. Kerov⁴ a en effet montré l'existence d'une formule universelle exacte pour les caractères évalués sur des cycles :

Théorème 4.1 (formule de Kerov). *Soit $k \geq 1$ un entier. Il existe un polynôme universel à coefficients entiers K_k tel que, pour tout q et tout diagramme de Young λ de taille q , on a :*

$$\Sigma_k(\lambda) := q(q-1) \dots (q-k+1) \chi_\lambda(12 \dots k) = K_k(R_2(\lambda), R_3(\lambda), \dots, R_{k+1}(\lambda))$$

La démonstration repose sur la même idée que celle du théorème 1 : les deux utilisent le même élément d'un espace de probabilités non commutatif dont la mesure spectrale est la mesure de transition du diagramme. En évaluant la taille des différents monômes de K_k quand q tend vers l'infini et quand la suite des λ_n renormalisés a une forme limite, on peut facilement retrouver l'équivalent de $\chi_{\lambda_n}(12 \dots k)$ à partir de ce théorème.

4.2 Calcul des coefficients

Grâce à une formule de Frobenius⁵ qui lie les valeurs des caractères aux moments de la mesure de transition, on a un algorithme pour calculer les coefficients de K_k

Proposition 4.2. *Considérons la série*

$$H(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty} B_j z^{1-j}.$$

Posons

$$\Sigma_k = -\frac{1}{k} [z^{-1}] H(z) \dots H(z-k+1)$$

⁴lors d'un exposé à l'IHP (janvier 2000). Cela a été ensuite publié par P.Biane [B2].

⁵Voir [M], 1.7 exemple 7, pages 117-118.

et

$$R_{k+1} = -\frac{1}{k}[z^{-1}]H(z)^k,$$

où $[z^{-1}]L(z)$ est le résidu de la série de Laurent $L(z)$. Alors

$$\Sigma_k = K_k(R_2, R_3, \dots, R_{k+1}).$$

Cet énoncé permet de calculer plus facilement certains termes (informatiquement ou avec des méthodes telles que l'inversion de Lagrange). On constate alors que, pour des petites valeurs de k , tous les coefficients sont positifs⁶.

Conjecture 4.3 (de Kerov). *Quel que soit l'entier $k \geq 1$, les coefficients de K_k sont tous positifs.*

Dans [GR], I.P. Goulden et A. Rattan auteurs ont démontré une formule explicite pour les coefficients des monômes de K_k de degré gradué $k - 1$ (où chaque R_n a pour degré n) et pour un monôme de degré $k - 3$ (il n'y a que des termes de degré gradué de même parité que $k + 1$, le seul monôme de degré $k + 1$ ou plus étant R_{k+1}). En outre, les monômes de la forme R_n ont une interprétation combinatoire simple (c.f. [B2]). Dans ces deux cas, la positivité en découle immédiatement.

⁶I.P. Goulden et A. Rattan ont vérifié ceci jusqu'à $k = 25$ et P. Biane donne les valeurs pour $k \leq 11$ dans [B2].

Bibliographie

[B1] P. Biane, *Representations of symmetric groups and free probability*, Adv. Math. **138**, 1998, pp 126-181.

[B2] P. Biane, *Characters of symmetric groups and free cumulants*, publié dans *Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 2003, pp 185-200.

[B3] P. Biane, *On the formula of Goulden and Rattan for Kerov polynomials*, arXiv preprint math.CO/0512467, 2005.

[GR] I.P. Goulden et A. Rattan, *An explicit form for Kerov's character polynomials*, Arxiv preprint math.CO/0505317, 2005, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[K] S.V. Kerov, *Transition probabilities of continual Young diagrams and the Markov moment problem.*, Funct. Anal. Appl. **27**, 1993, pp 104-117.

[M] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second Edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[Sa] B.E. Sagan, *The Symmetric group : representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2001.

[St] R. Stanley, *Irreducible symmetric group characters of rectangular shape*, Sem. Lotharingien de Combinatoire (electronique) **50**, 2003, B50d