Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 12 – Chaînes de Markov : Introduction

Lundi 7 décembre

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré.

Exercice 1 (Chaîne de Markov à deux états)**.** On considère une matrice de transition 2x2, qui s'écrit $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$, pour $p, q \in [0,1]$. On suppose que p ou q ne vaut pas 1 ou 0.

1. Montrer que $Q^n = \frac{1}{p+q}\left[\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} - (1-p-q)^n \begin{pmatrix} -p & p \\ q & -q \end{pmatrix}\right]$.
2. Soit μ la mesure définie par $\mu(1) = \frac{q}{p+q}$, $\mu(2) = \frac{p}{p+q}$, montrer que
$$\mu Q = \mu, \quad \lim_{n\to+\infty} Q^n_{1,1} = \lim_{n\to+\infty} Q^n_{2,1} = \mu(1), \quad \lim_{n\to+\infty} Q^n_{1,2} = \lim_{n\to+\infty} Q^n_{2,2} = \mu(2).$$
3. Soit (X_n) une chaine de Markov de matrice de transition Q et d'état initial 1, calculer le nombre moyen $N_n(1,1)$ et $N_n(1,2)$ de passages en 1 ou en 2 pendant les n premiers pas. Étudier $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(1,i)}{n}$.
4. Montrer que (X_n) converge en loi vers une limite que l'on déterminera.
5. Que se passe-t-il si $p = q = 1$?

Exercice 2 (Chaîne de Markov et indépendance)**.** Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Exercice 3 (h-transformée d'une matrice stochastique)**.** Soit S un ensemble dénombrable, $Q = (Q(i,j))_{i,j\in S}$ une matrice stochastique et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne canonique sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que pour tout $i \in S$, $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_i$ pour la filtration canonique. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S, h(x) > 0\}$ par la formule $P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} Q(i,j)$.

1. Montrer que P est une matrice stochastique. *On dit que P est la h-transformée de Q.*
2. Déterminée la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de Y_n la valeur au temps n de la chaîne de Markov associée à P par rapport à X_n.
3. On considère la marche aléatoire simple S_n sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0, S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [|0, N|]$, on définit $\mathbb{P}^{(N)}_k = \mathbb{P}_k[\,\cdot\,|T_N < T_0]$.
   (a) Rappelons que $\mathbb{P}_k[T_N < T_0] = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P^{(N)}_k$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
   (b) Trouver une fonction $h : [|0, N|] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

Exercice 4 (Propriété de Markov faible)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S, de fonction de transition Q, issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S. On pose

$$T_F = T_F(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}.$$

1. Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g définie par

$$g : x \in S \mapsto \mathbb{E}_x \left(h(X_{T_F}) \mathbf{1}_{\{T_F < \infty\}} \right)$$

est solution du problème suivant :

$$g(x) = \begin{cases} Qg(x) & \text{si } x \in F^c \\ h(x) & \text{si } x \in F. \end{cases}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $f(x) = \mathbb{E}_x \left(f(X_{n\wedge T_F}) \right)$.
3. En déduire que $f \geq g$.

Exercice 5 (Loi du 0-1 de Hewitt-Savage)**.** Soit (ξ_n) une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. L'application $\omega \mapsto (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots)$ définit une v.a. à valeurs dans l'espace produit $E^{\mathbb{N}}$, qui est muni de la tribu produit, la plus petite tribu rendant mesurable les applications coordonnées. Une fonction mesurable F définie sur $E^{\mathbb{N}}$ est dite symétrique si

$$F(x_1, x_2, \ldots) = F(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots)$$

pour toute permutation π de $\mathbb{N}$ à support fini. On veut montrer que si F est une fonction symétrique, alors la variable aléatoire $Y = F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ est constante p.s. On suppose, sans perte de généralité que F est bornée, donc que Y est ans L^1.

1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots \xi_n)$, $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2} \ldots)$, $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$ et $Z_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_n)$. Que peut-on dire de (X_n) et de (Z_n) ? En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \geq 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|X_n - Y|) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(|Z_n - \mathbb{E}(Y)|) \leq \epsilon.$$

2. Montrer qu'il existe un entier n et une fonction mesurable $g : E^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}(|F(\xi_1, \xi_2, \ldots) - g(\xi_1, \ldots \xi_n)|) \leq \epsilon.$$

En déduire que $\mathbb{E}(|Z_n - g(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n})|) \leq \epsilon$.

3. Conclure.
4. Donner un exemple d'application qui ne peut pas être déduit de la loi du 0-1 de Kolmogorov.