Bastien Mallein
Bureau V2

# TD 14 – Mouvement Brownien

Lundi 4 janvier

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré et $B$ un mouvement Brownien.

**Exercice 1** (Non dérivabilité du mouvement brownien)**.** Montrer que

$$\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

En déduire que pour tout $s > 0$, presque sûrement le mouvement brownien n'est pas dérivable à droite en $s$.

**Exercice 2** (Loi de l'arcsinus)**.** On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 | B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 | B_t = 0\}$.

1. Montrer que $d_1$ est un temps d'arrêt mais pas $g_1$.
2. On veut calculer la densité de la loi de $d_1$.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a $\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{E}[g(B_1)]$où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a posé
   $$g(x) = \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|\right]$$
   avec $\widetilde{B}$ un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de $\mathcal{F}_1$.
   (b) Montrer que $d_1 = 1+\left(\frac{N}{\widehat{N}}\right)^2$ en loi, où $N$ et $\widehat{N}$ sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.
   (c) En déduire la densité de la loi de $d_1$.
3. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de $g_1$.

**Exercice 3** (Lieu des zéros du mouvement Brownien)**.** Soit $B$ un mouvement Brownien. Montrer que p.s. $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$ est un ensemble fermé, non-borné, de mesure de Lebesgue nulle et sans points isolés.

**Exercice 4** (Temps d'atteinte et principe de réflexion)**.** Soit $B$ un mouvement Brownien. Pour $t \geq 0$ on note $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$ et pour $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Montrer que $T_a$ est un temps d'arrêt presque sûrement fini.
2. (a) Montrer que pour tout $a \geq 0$, $T_a = a^2 T_1$ en loi.
   (b) Soit $0 \leq a \leq b < \infty$, montrer que $T_b - T_a$ a la même loi que $T_{b-a}$ et est indépendant de $T_a$.
3. (a) Soit $a \geq 0 \geq b$. Prouver que $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$.
   (b) En déduire que la loi de $(S_t, B_t)$ est $\frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{a>0,b<a\}} dadb$.
   (c) Applications : Montrer que $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$ et $\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(a^2/B_1^2 \leq t)$.

**Exercice 5.** 1. On pose $X_t = B_t^2 - t$. Montrer que $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ pour tout $s < t$.

2. On pose $E_t^\lambda = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$. Montrer que $\mathbb{E}(E_t^\lambda|\mathcal{F}_s) = E_s^\lambda$ pour tout $s < t$.
3. Soit $a > 0$ et $T_a = \inf\{s \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(e^{-\mu T_a}\right) = e^{-a\sqrt{2\mu}}.$$

**Exercice 6** (Construction de Lévy du mouvement Brownien)**.** Le but de cet exercice est de construire la loi du mouvement Brownien comme un processus continu. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien réel issu de 0.

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $(B_t - tB_1)$ est indépendant de $B_1$.
2. En déduire que pour tout $s \leq u \leq t$, $B_u - \frac{u-s}{t-s}B_s - \frac{t-u}{t-s}B_t$ est indépendant de $\sigma(B_v, v \leq s)$ et de $\sigma(B_v, v \geq t)$. Déterminer la loi de $B_u - \frac{u-s}{t-s}B_s - \frac{t-u}{t-s}B_t$.
3. Soit $(N_{i,j}, i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N})$ des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit $W_t^{(1)} = \sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} N_{1,j} + (t - \lfloor t \rfloor)N_{\lfloor t \rfloor + 1}$. Montrer que $(W_t^{(1)}, t \geq 0)$ est un processus continu.
4. On pose par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [j2^{-n}, (j+1)2^{-n})$

$$W_t^{(n+1)} = W_t^{(n)} + N_{n+1,j}\left[(t - j2^{-n})\mathbf{1}_{\{t \leq (2j+1)2^{-(n+1)}\}} + (t - (j+1)2^{-n})\mathbf{1}_{\{t > (2j+1)2^{-n}\}}\right].$$

   Montrer que $(W_t^{(n)}, t \geq 0)$ est un processus continu.
5. Soit $N \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de $\max_{t \leq N}\left|W_t^{(n+1)} - W_t^{(n)}\right|$. En déduire que

$$\mathbb{P}(\sup_{[0,N]} |W^{(n+1)} - W^{(n)}| \geq 2^{-n/2}) \leq N2^n e^{-2^{n/2}}.$$

6. En conclure que p.s. $(W_t^{(n)})$ converge uniformément sur tout compact versu une fonction aléatoire $(W_t)$.
7. Montrer que $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien, et en déduire qu'il existe un mouvement Brownien continu.

**Exercice 7** (Formule d'Itô)**.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1}(B_{(j+1)/n} - B_{j/n})^2 = 1$ en probabilité.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f''(B_{j/n})(B_{(j+1)/n} - B_{j/n})^2 = \int_0^1 f''(B_s)ds$ en probabilité.
3. En déduire que $\sum_{j=0}^{n-1} f'(B_{j/n})(B_{(j+1)/n} - B_{j/n})$ converge en probabilité vers

$$\int_0^1 f'(B_s)dB_s := f(B_1) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

4. Montrer que pour tout $0 < s < t < 1$, on a $\mathbb{E}\left[\int_0^t f'(B_u)dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s f'(B_u)du$.