Processus aléatoires *ENS Paris*, 2015/2016

Bastien Mallein
Bureau V2

TD 15 – Synthèse

Lundi 11 janvier

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ représente un espace de probabilité filtré.

Exercice 1 (Espérance conditionnelle et loi produit)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{G}] = \int_E g(x,Y) P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y) P_X(dx)$ (ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Exercice 2 (Loi définie de façon conditionnelle)**.** Soit Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}+$ de densité par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$. Soit X une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes et déterminer leurs lois respectives.

Exercice 3 (Calculs explicites)**.** Soit X une variable aléatoire réelle, et $\mathcal{G} = \sigma(X \mathbf{1}_{\{X \in [-1,1]\}})$. Déterminer $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ lorsque X est une variable aléatoire de loi exponentielle, puis lorsque c'est une variable aléatoire de loi Gaussienne centrée.

Exercice 4 (Deux transformations de martingales)**.**

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté (i.e. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n), tel que $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si (X_n) est une martingale, alors $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale. Montrer que si (X_n) est une sous-martingale et si ϕ est croissante, alors $(\phi(X_n))$ est une sous-martingale.
2. On dit qu'un processus $(H_n)_{n\geq 1}$ est prévisible si, pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable (*Attention, parfois prévisible recouvre en plus la notion de bornitude, pas ici*). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté et $(H_n)_{n\geq 1}$ une famille prévisible et bornée. On pose $(H \bullet X)_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(H \bullet X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + ... + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Montrer que si (X_n) est une martingale, alors $((H \bullet X)_n)$ est aussi une martingale. Montrer que si (X_n) est une surmartingale (respectivement sous-martingale), et si $H_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $((H \bullet X)_n)$ est une surmartingale (respectivement sous-martingale).

Exercice 5 (Biais par la taille conditionnel)**.** Soit X une variable aléatoire strictement positive p.s. telle que $\mathbb{E}(X) = 1$. On définit la mesure de probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ par $\forall A \in \mathcal{F}, \widehat{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X)$. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, montrer que pour toute variable aléatoire intégrable Y, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\widehat{\mathbb{E}}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]$ p.s. En déduire une condition pour que $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{G}) = \widehat{\mathbb{P}}(\cdot|\mathcal{G})$.

Exercice 6 (Convergence conditionnelle)**.** On se donne $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(\mathcal{F}_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}_i]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $(X_i)_{i\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 7. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. sur $\mathbb{R}$ et F un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X_1 \in F) > 0$. On pose $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in F\}$, déterminer la loi de X_T.

Exercice 8 (Inégalité maximale pour les surmartingales)**.** On pose (X_n) une surmartingale positive, et $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \geq a\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} X_n \geq a) \leq \mathbb{E}(X_0)/a.$$

Exercice 9 (Loi des records)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et positives de même fonction de répartition F supposée continue. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n > X_0\}$ et $Y = X_N$.

1. Calculer la loi de N et son espérance.
2. Calculer la loi jointe de (Y, N), en déduire la fonction de répartition de Y et celle de $F(Y)$.

Exercice 10 (Renouvellement discret)**.** Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ telle que $\mathbb{E}(Y_1) = \mu < +\infty$ et $\mathrm{PGCD}\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$. On définit $X_0 = 1$ et

$$X_n = \inf\{m \geq n : \exists k \geq 1, Y_1 + \cdots + Y_k = m\} - n.$$

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} : Y_1 + \ldots + Y_k = n\right) = 1/\mu.$$
2. (**) On suppose que $\mathbb{E}(Y_1^2) < +\infty$, on note
$$D_n = \inf\{m \geq n : \exists k \geq 1, Y_1 + \cdots + Y_k = m\} - \sup\{m \leq n : \exists k \geq 0 : Y_1 + \cdots + Y_k = m\},$$
calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(D_n)$ et en déduire le paradoxe des ampoules.

Exercice 11. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un ensemble E muni d'une matrice de transition Q irréductible. Pour $z \in E$ et $G \subset E$, on pose $T_z = \inf\{n \geq 0 : X_n = z\}$, $T_G = \inf\{n \geq 0 : X_n \in G\}$. On dit que $f : E \to \mathbb{R}^+$ est harmonique (resp. surharmonique) sur une partie F de E si $f = Qf$ (resp. $f \geq Qf$) sur F.

1. Montrer que si F est harmonique (resp. surharmonique) sur F alors $(f(X_{n\wedge T_{E\backslash F}})$ est une martingale (resp. surmartingale).
2. On va montrer qu'une chaîne est transiente si et seulement si il existe un point $z \in G$, et une fonction h non-nulle, harmonique sur $E\backslash\{z\}$ et nulle en z.
   (a) Supposons que la chaîne est transiente, montrer que pour tout $z \in E$, la fonction $h(x) = \mathbb{P}_x(T_z = +\infty)$ satisfait l'énoncé.
   (b) Montrer la réciproque en prouvant que pour $x \in E$ tel que $h(x) > 0$, on a $\mathbb{P}_x(T_z < +\infty) < 1$.

3. On suppose maintenant qu'il existe un sous-ensemble fini G et E et une fonction $h : E \to \mathbb{R}_+$ qui est surharmonique sur $E \backslash G$ et telle que l'ensemble $\{x \in E : h(x) < K\}$ est fini pour tout $K > 0$. On souhaite montrer que cette hypothèse entraîne la récurrence de la chaîne. On suppose par l'absurde que la chaîne est transiente.
   (a) Soit $x \in E \backslash G$, montrer que $h(X_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. et en déduire que $\mathbb{P}_x(T_G < +\infty) = 1$.
   (b) Conclure.

Exercice 12 (Une égalité connue)**.** Soit X une variable aléatoire positive, montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

Soit f, g deux fonctions croissantes continues à droite bornées, montrer l'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}} f(t-) dg(t) = f(+\infty)g(+\infty) - f(-\infty)g(-\infty) - \int g(t-) df(t) + \sum_{t \in \mathbb{R}} (g(t) - g(t-))(f(t) - f(t-)).$$

Exercice 13 (Parapluies)**.** Je possède N parapluie, qui sont répartis entre ma maison et mon lieu de travail. Chaque jour, lorsque je vais au travail, et lorsque je rentre, il pleut avec probabilité $p \in (0, 1)$. J'emporte bien entendu un parapluie avec moi s'il pleut, et laisse les parapluies en place s'il ne pleut pas. Tous les événements de pluie sont supposés indépendants. Pour chaque jour $n \in \mathbb{N}$, je note X_n le nombre de parapluie présent à la maison au soir du jour n.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov, et déterminer sa matrice de transition.
2. Montrer que (X_n) est récurrente positive. Calculer sa mesure invariante.
3. Pour tout n, je note T_n le nombre de jours où j'ai été mouillé. Déterminer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} \frac{T_n}{n}$.

Exercice 14 (Le digicode)**.** Soit $(V_j, j \geq 1)$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$ indépendantes. On supposera que $V_0 = V_{-1} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on notera $X_n = (V_n, V_{n-1})$.

1. (a) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov sur $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ dont on décrira les probabilités de transition.
   (b) La chaîne est-elle irréductible ? Est-elle récurrente positive ?
   (c) Quelle est la loi de X_n lorsque $n \geq 2$ fixé ? En déduire la loi stationnaire π de la chaine de Markov.
   (d) Justifier le fait que $T = \min\{n \geq 0 : X_n = (1, 1)\}$ est presque sûrement fini et que $\mathbb{E}(T) < +\infty$.
2. (a) Soit N_n le cardinal de l'ensemble $\{k \leq n : X_k = (1, 1)\}$. Que peut-on dire de $\lim_{n \to +\infty} \frac{N_n}{n}$?
   (b) On définit par récurrence $T_1 = T$ et pour tout $j \geq 1$,
   $$T_{j+1} = \inf\{n > T_j : X_n = (1, 1)\}.$$
   Que vaut N_{T_j} ? En déduire que $j/T_j \to p^2$ p.s. quand $j \to +\infty$.
   (c) Montrer que $(T_{j+1} - T_j, j \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d.
   (d) En déduire que $\mathbb{E}(T_{j+1} - T_j) = \frac{1}{p^2}$.
   (e) Que vaut T_2 lorsque $V_{1+T_1} = 1$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_2 - T_1 | V_{1+T_1} = 1)$.
   (f) Calculer alors $\mathbb{E}(T_2 - T_1 | V_{1+T_1} = 0)$.

(g) Montrer que conditionnellement à $V_{1+T_1} = 0$, la loi de $T_2 - T_1 - 1$ est identique à celle de T. En conclure la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 15. Soit M et N deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On construit un arbre de Galton-Watson $\mathbb{T}$ tel que le nombre d'enfants d'un individu donné ait même loi que M. Exprimer la probabilité d'extinction de ce processus.

On construit maintenant un processus de Galton-Watson indexé par l'arbre $\mathbb{T}$ de la façon suivante : à chaque individu $u \in \mathbb{T}$, on associe la variable aléatoire $Z_u \in \mathbb{N}$ telle que si v est un enfant de u :

$$Z_v = \sum_{j=1}^{Z_u} N_j^v,$$

avec $(N_j^v, j \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{T})$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que $\mathbb{N}$. Exprimer la probabilité que le processus (Z_v) s'éteigne, lorsque v parcourt une branche fixée de l'arbre. Calculer la probabilité que (Z_v) s'éteigne dans tout l'arbre.

Exercice 16 (Limites de lois Beta)**.** Calculer la limite en loi de $bB(a,b)$ quand $b \to +\infty$.

Déterminer f et g tels que $(B(b,b) - f(b))/g(b)$ converge en loi vers une Gaussienne.

Déterminer une renormalisation telle que $B(a,b)$ converge quand $a \to 0$.

Exercice 17. Soit Q la matrice de transition sur $S = \{0, \ldots, N\}$, définie par

$$Q(i,j) = \binom{N}{j} \left(\tfrac{i}{N}\right)^j \left(1 - \tfrac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1. Classifier les états de S.
2. Montrer que la chaine de Markov (X_n) de matrice de transition Q est une martingale.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n$ existe p.s. et calculer la loi de X_∞ sous $\mathbb{P}_k$.