Examen: Fonctions holomorphes et dynamique complexe à plusieurs variables (Lundi le 14 janvier 2013 de 9h à 13h)

Les documents ne sont pas autorisés. La partie B n'est pas obligatoire mais permet d'améliorer les notes. Plusieurs exercices sont des résultats connus et contiennent des idées utiles. Après avoir rendu votre copie, vous pouvez continuer le travail à la maison et déposer une autre copie dans mon casier au DMA avant le 21 janvier.

Partie A

Exercice 1. Soient $0 < R_1 < R_1'$ et $0 < R_2' < R_2$ des nombres réels. Soit

$$f = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j$$

une série entière. Supposons que f converge normalement sur le bidisque $\{|z_1| \leq R_1, |z_2| \leq R_2\}$ et aussi sur le bidisque $\{|z_1| \leq R_1', |z_2| \leq R_2'\}$. Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert convexe délimité par la demi-droite $]-\infty, \log R_1] \times \{\log R_2\}$, la demi-droite $\{\log R_1'\} \times]-\infty, \log R_2']$ et le segment joignant $(\log R_1, \log R_2)$ et $(\log R_1', \log R_2')$.

(a) Montrer que $r_1^i r_2^j \leq \max(R_1^i R_2^j, R_1'^i R_2'^j)$ pour $r_1, r_2 \geq 0$ tels que le point $(\log r_1, \log r_2)$ appartient à $\overline{\Pi}$.

(b) Montrer que f converge normalement sur le bidisque $\{|z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2\}$ avec r_1, r_2 comme ci-dessus.

(c) Montrer que f définit une fonction holomorphe sur la réunion des bidisques $\{|z_1| < r_1, |z_2| < r_2\}$ avec $(\log r_1, \log r_2) \in \Pi$.

Exercice 2. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^2$ et L la droite complexe d'équation $z_2 = 0$ dans $\mathbb{C}^2$ avec $L \cap U$ connexe. Soit $V \subset U$ un ouvert qui contient $U \setminus L$ mais $V \neq U \setminus L$. Soit f une fonction holomorphe sur V.

(a) Si f_1, f_2 sont des extensions holomorphes de f aux ouverts V_1, V_2 respectivement avec $V \subset V_i \subset U$, montrer que $f_1 = f_2$ sur $V_1 \cap V_2$.

(b) Montrer qu'il existe un ouvert maximal V' tel que $V \subset V' \subset U$ et que f admette une extension holomorphe à V'.

(c) En utilisant le théorème de Hartogs, montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur U.

(d) Soient X une variété complexe de dimension 2 et Y un sous-ensemble analytique de dimension ≤ 1 de X. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $X_0 \subset X$ qui contient $X \setminus Y$ et qui rencontre toute composante irréductible de Y. Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur X.[1]

Exercice 3. Soit (a_n) une suite de nombres réels telle que $\sum a_n < \infty$. Soit (u_n) une suite de fonctions p.s.h. sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Supposons que $u_n \leq a_n$ sur U et que $\|u_n\|_{L^1(U)} \leq a_n$.

(a) Montrer que la somme $\sum u_n$ converge point par point vers une fonction p.s.h.

(b) Déduire que pour presque tout $z \in U$ on a $u_n(z) \to 0$ quand $n \to \infty$.[2]

Exercice 4. Soit D un domaine pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^2$ qui contient le point 0. Soit L_1 (resp. L_2) la droite complexe d'équation $z_2 = 0$ (resp. $z_1 = 0$). Soit f_i une fonction holomorphe sur un ouvert de L_i qui contient $L_i \cap \overline{D}$ telle que $f_i(0) = 0$ pour $i = 1, 2$.

(a) On écrit $f_i(z_i) = z_i l_i(z_i)$. Montrer qu'il existe une fonction lisse g_i sur D, holomorphe au voisinage de $(L_1 \cup L_2) \cap D$ telle que $g_i(z) = l_i(z_i)$ quand $|z_{2-i}|$ est suffisamment petit.

(b) Montrer qu'il existe une fonction lisse g sur D holomorphe au voisinage de $(L_1 \cup L_2) \cap D$ telle que $g(z) = f_i(z_i)$ sur $L_i \cap D$.

(c) En utilisant la méthode L^2 et la fonction p.s.h. $\varphi(z) = 2\log|z_1| + 2\log|z_2|$, montrer qu'il existe une solution h à l'équation $\overline{\partial}h = \overline{\partial}g$ sur D telle que $h^2 e^{-\varphi}$ soit localement intégrable.

(d) Montrer que $F = g - h$ est une fonction holomorphe sur D qui est égale à f_i sur $L_i \cap D$.

Exercice 5.[3] Soient f_1, f_2 des polynômes complexes de degrés $d_1 \geq 2$ et $d_2 \geq 2$ respectivement. Notons respectivement Ω_i, J_i, K_i, F_i le bassin de l'infini, l'ensemble de Julia, l'ensemble de Julia rempli et l'ensemble de Fatou de f_i. Supposons que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

[1] Ce résultat est valable en toute dimension.

[2] Ce résultat peut être utilisé pour prouver que certaines propriétés soient vraies presque partout.

[3] Ces propriétés sont essentiellement obtenues par Julia et Fatou au début des années 20 (la naissance de la dynamique complexe).

(a) Montrer que si un point a est périodique d'ordre n pour f_1 alors $f_2(a)$ l'est aussi. En déduire que a est prépériodique pour f_2.

(b) Montrer que f_1, f_2 admettent un point périodique commun.

(c) Montrer que $f_2^{-1}(\Omega_1) \subset \Omega_1$. En déduire que $\Omega_2 \subset \Omega_1$.

(d) Montrer que $\Omega_1 = \Omega_2$, $J_1 = J_2$, $K_1 = K_2$, $F_1 = F_2$.

(e) Montrer que les fonctions de Green et les mesures d'équilibre associées aux f_1, f_2 sont égales.

Partie B

Exercice 1. Dans cet exercice on considère $\mathbb{P}^2$ comme une compactification de $\mathbb{C}^2$ avec une droite projective à l'infini. Notons $z = (z_1, z_2)$ les coordonnées standard de $\mathbb{C}^2$. Posons B l'intérieur de $\mathbb{P}^2 \setminus \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_2| \leq 98\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 3, |z_2| < 100\}$. Posons aussi $\Omega' = B \cup D$, $\Delta = D \cap \{z_1 = z_2\}$ et $\Omega = \Omega' \setminus \Delta$. Considérons les fonctions

$$\varphi_1(z) = \left|\frac{1}{z_2}\right|^2 + \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \quad \text{et} \quad \varphi_2(z) = \frac{10^{10}}{|z_1 - z_2|^{10}} + 10^{-10}|z_1|^2.$$

(a) Montrer que φ_1 (resp. φ_2) est une fonction strictement p.s.h. sur l'intérieur de $\mathbb{P}^2 \setminus \{z_2 = 0\}$ (resp. sur $D \setminus \Delta$).

(b) Montrer que la fonction φ donnée par la formule ci-dessous est bien définie et strictement p.s.h. sur Ω

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) & \text{si } z \in B \\ \varphi_2(z) & \text{si } |z_2| < 4 \\ \max(\varphi_1(z), \varphi_2(z)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) En utilisant les exercices 1 et 2 de la partie A, montrer que toute fonction holomorphe sur Ω se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω'. Déduire que cette fonction est constante.[4]

[4] L'existence de variété complexe avec une fonction strictement p.s.h. et sans fonctions holomorphes non-constantes a été posée comme question ouverte par Narasimhan et Oeljeklaus. On peut modifier l'exemple ci-dessus afin d'avoir une fonction strictement p.s.h. lisse bornée. Une autre construction plus compliquée mais plus intéressante a été donnée par Forstneric dans arXiv:1210.8121

Exercice 2. Soit φ une fonction p.s.h. sur une variété complexe X. Montrer que l'ensemble des points $a \in X$ tels que $e^{-\varphi}$ ne soit pas intégrable dans un voisinage de a est un sous-ensemble analytique propre de X.

Exercice 3. Soit μ une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{C}$. Supposons que μ admet un potentiel höldérien.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $E \subset \mathbb{C}$ est un ensemble de dimension de Hausdorff[5] $\leq \alpha$ alors $\mu(E) = 0$.

(b) Soit φ une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $e^{\alpha|\varphi|}$ soit dans $L^1(\mu)$.[6]

Exercice 4. Soit v une fonction lisse sur $\mathbb{P}^1$. Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$. Posons

$$g = \sum_{n \geq 0} d^{-n} v \circ f^n.$$

(a) Montrer que g est une fonction höldérienne sur $\mathbb{P}^1$.

(b) Montrer que la fonction de Green de f est localement höldérienne sur $\mathbb{C}$.[7]

(c) En déduire que la mesure d'équilibre de f n'a pas de masse sur les ensembles de dimension de Hausdorff suffisament petite.

[5] La mesure de Hausdorff β-dimensionnelle $H^\beta(E)$ de E, avec $\beta > 0$, est définie par

$$H^\beta(E) = \sup_{\epsilon > 0} \inf \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_n)^\beta$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements $(E_n)_{n \geq 0}$ de E avec $\operatorname{diam}(E_n) \leq \epsilon$. La dimension de Hausdorff de E est, par définition, égale à $\inf\{\beta : \ H^\beta(E) = 0\}$.

[6] Voir arXiv:0801.1983 pour un résultat général en toute dimension.

[7] Ce résultat est dû à Fornaess-Sibony.