

Contrôlabilité de l'équation des ondes & Inégalités d'Ingham

Amic FROUVELLE, Daniel HAN-KWAN

Sujet proposé par Olivier Glass

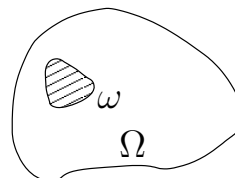
30 juin 2006

Résumé

Les systèmes d'équations différentielles ou aux dérivées partielles permettent de modéliser efficacement l'évolution d'un grand nombre de systèmes physiques. La théorie du contrôle consiste à se poser le problème simple suivant : supposons que l'on ait un système physique dans un état donné, à un temps initial, et que l'on dispose d'un moyen pour influencer ce système. Peut-on utiliser ce moyen pour qu'à un temps ultérieur préalablement choisi, il soit dans un état prédéterminé ? Dans quelle mesure et dans quel sens peut on alors contrôler l'évolution physique ? Mathématiquement parlant, dans quel espace de fonctions peut-on choisir un éventuel contrôle ?

Cet exposé de maîtrise se propose d'étudier plus spécifiquement l'équation des ondes :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f \mathbb{1}_\omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u(0) = u^0, u'(0, \cdot) = u^1 \end{cases}$$



où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , et ω un petit ouvert inclus dans Ω . La perturbation est ici modélisée par un terme supplémentaire en f , où f appartient à un espace de fonctions à préciser ultérieurement. « Physiquement » le problème peut s'interpréter comme suit : si on place un petit haut parleur dans une salle où il y a du bruit, comment s'arranger pour qu'au temps T , le bruit dans la salle soit exactement celui qu'on veut ? En dimension 1, on peut également interpréter ce problème en imaginant une corde fixe à ses bouts, à laquelle on peut imposer une contrainte et dont on veut contrôler le mouvement.

Le plan adopté est le suivant : nous étudierons pour commencer le cas de la dimension finie, c'est à dire quand le problème est décrit par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) où nous donnerons différents critères de contrôlabilité. Nous nous intéresserons ensuite au cas de l'équation des ondes, et nous mettrons en évidence certaines analogies avec le contrôle des EDO. Néanmoins, différentes notions de contrôlabilité devront être ici définies. Pour finir nous étudierons le cas spécifique de la dimension 1 où nous introduirons les inégalités d'Ingham, pour pouvoir résoudre explicitement le problème dans le cas où on rajoute un terme supplémentaire dans l'équation en αu , qui représente une force de rappel.

Table des matières

1	Contrôlabilité des Équations Différentielles Ordinaires	3
1.1	Introduction	3
1.2	Problèmes de contrôlabilité	3
1.3	La propriété d'observabilité	4
1.4	La condition de Kalman	5
2	Contrôlabilité intérieure de l'équation des ondes	7
2.1	Introduction	7
2.2	Existence et unicité de solutions	7
2.3	Problèmes de contrôlabilité	12
2.4	Approche variationnelle du problème : la méthode H.U.M.	12
2.5	Contrôlabilité approchée	15
2.5.1	Introduction	15
2.5.2	Approche variationnelle	15
3	Inégalités d'Ingham et application à l'équation des ondes unidimensionnelle	15
3.1	Inégalités d'Ingham	16
3.2	Application à l'équation des ondes unidimensionnelle	21
3.2.1	Observabilité pour la contrôlabilité intérieure	21
3.2.2	Analyse spectrale de l'équation des ondes adjointe	22
3.2.3	Cas $\alpha = 0$	23
3.2.4	Cas $\alpha > 0$	24

1 Contrôlabilité des Équations Différentielles Ordinaires

1.1 Introduction

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$. On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} x'(t) - Ax(t) = Bu(t), & t \in]0, T[, \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (1)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ et $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Le contrôle est dans ce cas représenté par la fonction $u \in L^2(]0, T[, \mathbb{R}^m)$. Typiquement on a $m \leq n$ (on désire bien sûr contrôler l'EDO avec un entier m aussi petit que possible).

Lemme 1.1 *Étant donnés $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in L^2(]0, T[, \mathbb{R}^m)$, le système (1) admet une solution unique $x \in H^1(]0, T[, \mathbb{R}^n)$ donnée par :*

$$x(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2)$$

Démonstration La solution de l'équation (1) sans second membre s'écrit $t \mapsto e^{tA}x^0$. On peut appliquer la méthode de variation des constantes : on cherche une solution sous la forme $e^{tA}\lambda(t)$ avec $\lambda \in H^1(]0, T[, \mathbb{R}^n)$ et $\lambda(0) = 0$. On cherche alors à résoudre (« ' » désigne la dérivée au sens des distributions) :

$$Ae^{tA}\lambda + e^{tA}\lambda' - Ae^{tA}\lambda = Bu(t)$$

soit $\lambda'(t) = e^{-tA}Bu(t) \in L^2(]0, T[, \mathbb{R}^n)$. Puisque $\lambda \in H^1(]0, T[, \mathbb{R}^n)$, on a le théorème fondamental du calcul différentiel, soit : $\lambda(t) = \int_0^t e^{-sA}Bu(s)ds$

(2) est donc bien une solution de (1) avec condition initiale x^0 .

Si $y(t)$ est une autre solution à ce problème, alors $x - y$ est solution de (1) sans second membre et avec condition initiale nulle, d'où $x = y$, ce qui montre l'unicité de la solution. \diamond

1.2 Problèmes de contrôlabilité

On fixe $T > 0$ et on pose pour x^0 dans \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} R(T; x^0) &= \{\text{états atteignables au temps } T \text{ partant de } x^0\} \\ &= \{x(T) \mid x \text{ solution de (1) pour } u \text{ parcourant } L^2(]0, T[, \mathbb{R}^m)\} \end{aligned}$$

Définition 1.2.1 *On donne deux notions de contrôlabilité :*

1. Le système (1) est dit exactement contrôlable ssi $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, $R(T; x^0) = \mathbb{R}^n$
2. Le système (1) est dit zéro-contrôlable ssi $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \in R(T; x^0)$

Proposition 1.2.1 (1) exactement contrôlable \Leftrightarrow (1) zéro-contrôlable

Démonstration On a $R(T; x^0) = R(T; 0) + e^{TA}x^0$ et comme e^{TA} est inversible, on a

$$\begin{aligned} \forall x^0 \in \mathbb{R}^n, R(T; x^0) = \mathbb{R}^n &\Leftrightarrow R(T; 0) = \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \forall x^0 \in \mathbb{R}^n, -e^{TA}x^0 \in R(T; 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x^0 \in \mathbb{R}^n, 0 \in R(T; x^0), \end{aligned}$$

qui est l'équivalence souhaitée. \diamond

1.3 La propriété d'observabilité

Soit A^* la matrice adjointe de A . Considérons le système adjoint de (1) :

$$\begin{cases} -\varphi' = A^*\varphi, & t \in]0, T[, \\ \varphi(T) = \varphi_T \end{cases} \quad (3)$$

$\forall \varphi_T \in \mathbb{R}^m$, ce système peut être résolu par renversement du temps.

Lemme 1.2 *La solution x du système (1) est telle que $x(T) = 0$ pour le contrôle $u \in L^2(]0, T[, \mathbb{R}^m)$ si et seulement si*

$$\int_0^T \langle u, B^*\varphi \rangle dt + \langle x^0, \varphi(0) \rangle = 0 \quad (4)$$

pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ avec φ solution de (3).

Démonstration On prend le produit scalaire entre (1) et φ , puis entre (1) et x .

$$\langle x', \varphi \rangle = \langle Ax, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle \text{ et } -\langle x, \varphi' \rangle = \langle A^*\varphi, x \rangle$$

On a donc $\frac{d}{dt} \langle x, \varphi \rangle = \langle Bu, \varphi \rangle = \langle u, B^*\varphi \rangle$, puis après intégration :

$$\langle x(T), \varphi_T \rangle = \langle x^0, \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle u, B^*\varphi \rangle dt$$

On conclut en utilisant le fait que $x(T) = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n, \langle x(T), \varphi_T \rangle = 0$. \diamond

On peut alors introduire la fonctionnelle $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^*\varphi|^2 dt + \langle x^0, \varphi(0) \rangle \quad (5)$$

où φ est la solution de (3) avec comme condition initiale φ_T au temps T .

Lemme 1.3 *Supposons que J admette un minimum en $\hat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\varphi}$ la solution du système adjoint (3) avec donnée initiale $\hat{\varphi}_T$. Alors*

$$u = B^*\hat{\varphi} \quad (6)$$

est un contrôle de (1) avec donnée initiale x^0 .

Démonstration

On a $\frac{J(\hat{\varphi}_T + h\varphi_T) - J(\hat{\varphi}_T)}{h} = \int_0^T \langle B^*\hat{\varphi}, B^*\varphi \rangle dt + \langle x^0, \varphi(0) \rangle + \frac{h}{2} \int_0^T |B^*\varphi|^2 dt$, qui est du même signe que h . On a donc $\int_0^T \langle B^*\hat{\varphi}, B^*\varphi \rangle dt + \langle x^0, \varphi(0) \rangle = 0$ et on peut appliquer le lemme précédent avec $u = B^*\hat{\varphi}$. \diamond

Définition 1.3.1 *Le système (3) est dit **observable** au temps $T > 0$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\int_0^T |B^*\varphi|^2 dt \geq c|\varphi(0)|^2 \quad (7)$$

pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, où φ est la solution de (3).

Remarque 1.3.1 Cette définition est équivalente à la suivante : il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt \geq c |\varphi_T|^2 \quad (8)$$

pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, où φ est la solution de (3).

En effet l'application qui à φ_T associe $\varphi(0)$ est linéaire et continue d'après l'équation (2).

Remarque 1.3.2 Cette définition est également équivalente au principe d'unicité suivant :

$$\forall t \in [0, T], B^* \varphi(t) = 0 \Rightarrow \varphi_T = 0 \quad (9)$$

pour tout $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, où φ est la solution de (3).

En effet la semi-norme $|\cdot|_*$ telle que $|\varphi_T|_* = \left(\int_0^T |B^* \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ est alors une norme, équivalente (car on est en dimension finie) à la norme usuelle.

La propriété d'observabilité est intimement liée à l'existence de minimum pour la fonctionnelle J précédemment définie, comme le montre le théorème suivant. Le problème de contrôlabilité est donc réduit à l'étude d'une « simple » inégalité, ce qui conceptuellement représente un problème moins ardu.

Théorème 1.1 Le système (1) est exactement **contrôlable** au temps T si et seulement si le système (3) est **observable** au temps T .

Démonstration On commence par montrer l'implication réciproque. On suppose que (3) est observable au temps T . Il suffit de montrer que pour $x^0 \in \mathbb{R}^n$, la fonctionnelle J définie par (5) admet un minimum.

On remarque que J est continue. La condition d'observabilité entraîne immédiatement que $J(\varphi_T) \rightarrow +\infty$ quand $|\varphi_T| \rightarrow \infty$, ce qui montre que J admet un minimum.

Pour l'implication réciproque, on suppose que (1) est exactement contrôlable au temps T . On veut montrer l'observabilité au sens de la remarque 1.3.2. Soit $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ et φ la solution de (3) associée. On suppose que pour tout $t \in [0, T]$, $B^* \varphi(t) = 0$ et on veut montrer que $\varphi_T = 0$. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe $u \in L^2(]0, T[, \mathbb{R}^m)$, tel que $x(T) = 0$, pour x la solution de (1) associée à x^0 . D'après le lemme 1.2, on a

$$\int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle dt + \langle x^0, \varphi(0) \rangle = 0$$

et comme $\forall t \in [0, T]$, $B^* \varphi(t) = 0$, on obtient que $\langle x^0, \varphi(0) \rangle = 0$. Ceci étant valable quelque soit x^0 on a donc $\varphi(0) = 0$, et donc $\varphi = 0$ puis $\varphi_T = 0$. \diamond

1.4 La condition de Kalman

La condition de Kalman donne un critère algébrique pour la contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension finie. En particulier on voit que le temps T de contrôle n'intervient pas dans la notion de contrôlabilité.

Théorème 1.2 *Le système (1) est exactement contrôlable en un temps $T > 0$ si et seulement si*

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \quad (10)$$

où $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est la matrice $n \times mn$ obtenue par juxtaposition de chacune des matrices $n \times m$, appelée matrice de contrôlabilité.

En particulier si le système est contrôlable en un temps $T > 0$ arbitraire, il est contrôlable en tout temps.

Démonstration

(\Rightarrow) Supposons que $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) < n$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ tel que

$$v^*(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = 0$$

Comme $v^*(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = (v^*B, v^*AB, \dots, v^*A^{n-1}B)$, $v^*B = \dots = v^*A^{n-1}B = 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, il existe $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_0I$ et donc $v^*A^nB = 0$. Toujours d'après Cayley-Hamilton, on en déduit que $v^*A^k B = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a $v^*e^{tA}B = 0$ pour tout t .

D'après le lemme 1.1, la solution de (1) a pour expression :

$$x(t) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \quad (11)$$

On peut calculer le produit scalaire de v par $x(T)$:

$$\langle v, x(T) \rangle = \langle v, e^{TA}x^0 \rangle + \int_0^T v^*e^{(T-s)A}Bu(s)ds = \langle v, e^{TA}x^0 \rangle$$

Cela signifie que la projection orthogonale de la solution x au temps T sur la droite vectorielle engendrée par v ne dépend pas du contrôle u . Donc le système n'est pas contrôlable.

(\Leftarrow) Supposons à présent que $(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. D'après le théorème (1.1) il suffit de vérifier la condition d'observabilité.

Supposons que $B^*\varphi(t) = 0, \forall t \in [0, T]$ où $\varphi(t) = e^{(T-t)A^*}\varphi_T$ est la solution du problème adjoint 3. Alors $B^*e^{(T-t)A^*}\varphi_T = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. En dérivant cette fonction et en prenant la valeur en $t = T$ à chaque fois, on obtient que :

$$B^*(A^*)^k\varphi_T = 0, \forall k \geq 0$$

Donc $\varphi_T^*A^k B = 0, \forall k \geq 0$ Or, $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ donc $\varphi_T = 0$.

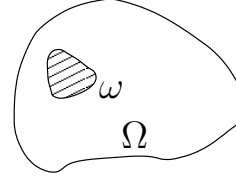
La remarque (1.3.2) nous dit alors que le système est exactement contrôlable. \diamond

2 Contrôlabilité intérieure de l'équation des ondes

2.1 Introduction

On considère l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f \mathbb{1}_\omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \end{cases} \quad (12)$$



Le domaine Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière. La zone de contrôle ω est un ouvert non vide de Ω . Les états initiaux u^0 et u^1 sont des fonctions de Ω dans \mathbb{R} . On note « ' » la dérivée temporelle. f est le paramètre de contrôle. On se fixe $T > 0$ et des états u_T^0 et u_T^1 . Le but est de pouvoir « contrôler » l'équation, c'est à dire trouver une fonction f telle que la solution u de (12) vérifie $u(T) = u_T^0$ et $u'(T) = u_T^1$.

Tout ce que l'on écrira par la suite se généralise simplement et de la même manière dans le cas où l'on rajoute un terme dans la première équation de (12) : $u'' - \Delta u + \alpha u = f \mathbb{1}_\omega$, où $\alpha > 0$ est une constante fixée.

2.2 Existence et unicité de solutions

On rappelle les définitions des espaces sur lesquels nous travaillerons, ainsi que des résultats de décomposition spectrale. On pose $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)\}$. C'est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire $(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v)$, on note $\|\cdot\|_{H^1}$ la norme associée. On pose alors $H_0^1(\Omega)$ le complété de $C_c^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ (il s'agit des fonctions de $H^1(\Omega)$ « qui sont nulles sur $\partial\Omega$ » au sens du théorème de trace). $H_0^1(\Omega)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit, ou pour le produit scalaire équivalent suivant, par inégalité de Poincaré, $(u, v)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$. Son dual est $H^{-1}(\Omega)$.

Dans la suite (\cdot, \cdot) désignera le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.

On peut montrer (en utilisant le fait que « $(-\Delta)^{-1}$ » est un opérateur autoadjoint compact) qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ de vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$, avec les e_n dans $H_0^1(\Omega)$. On note λ_n les valeurs propres associées ($\lambda_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$, on peut les supposer croissantes) et on a les caractérisations suivantes :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n e_n \text{ (limite forte dans } L^2(\Omega)), \text{ avec } \|\psi\|_{L^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^2 < \infty \right\} \\ H_0^1(\Omega) &= \left\{ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n e_n \text{ (limite forte dans } H_0^1(\Omega)), \text{ avec } \|\psi\|_{H_0^1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \psi_n^2 < \infty \right\} \\ H^{-1}(\Omega) &= \left\{ \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n e_n \text{ (limite forte dans } H^{-1}(\Omega)), \text{ avec } \|\psi\|_{H^{-1}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n^2}{\lambda_n} < \infty \right\} \end{aligned}$$

On admet également des résultats de généralisation pour des distributions à valeurs dans des espaces de Banach (voir par exemple [4]).

On note $L^1(]0, T[, L^2(\Omega))$ l'ensemble des fonctions f de $]0, T[$ dans $L^2(\Omega)$ (à égalité presque

partout près) telles que $\|f\|_{L^1(]0,T[,L^2(\Omega))} = \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} dt < +\infty$.

On définit de même $L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))$, $L^1(]0,T[,H_0^1(\Omega))$, et $L^\infty(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, on a alors :

$$(L^1(]0,T[,L^2(\Omega)))' = L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega)) \text{ et } (L^1(]0,T[,H_0^1(\Omega)))' = L^\infty(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$$

On a également que $\mathcal{D}(]0,T[\times\Omega)$ est dense dans $L^1(]0,T[,L^2(\Omega))$ et dans $L^1(]0,T[,H_0^1(\Omega))$.

On se place dans un cas plus général (sans restreindre f) :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \end{cases} \quad (13)$$

Théorème 2.1

Pour $f \in L^1(]0,T[,L^2(\Omega))$ et pour (u^0, u^1) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on a existence et unicité d'une solution u de (13), au sens où $u \in C([0,T],H_0^1(\Omega))$, $u' \in C([0,T],L^2(\Omega))$, $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$ et telle que pour tout $\psi \in C^\infty([0,T] \times \Omega)$ à support compact en x :

$$\int_{]0,T[\times\Omega} (-u'\psi' + \nabla u \nabla \psi) + \left[\int_{\Omega} u'\psi \right]_0^T = \int_{]0,T[\times\Omega} f\psi. \quad (14)$$

Remarque 2.2.1 Par densité, on obtient alors la même relation pour ψ tel que $\psi \in C([0,T],H_0^1(\Omega))$ et $\psi' \in C([0,T],L^2(\Omega))$.

Démonstration On décompose $u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0 e_n$, $u^1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^1 e_n$, et $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) e_n$ (défini

pour presque tout $t \in [0,T]$) dans cette base et on résout « composante par composante » : on cherche l'unique solution du problème de Cauchy $u_n'' + \lambda_n u_n = f_n$ avec conditions initiales $u_n(0) = u_n^0, u_n'(0) = u_n^1$.

On obtient que $u_n \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ définie par :

$$u_n(t) = u_n^0 \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{u_n^1}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \int_0^t \frac{f_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds$$

On pose « $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) e_n$ » (on veut montrer que c'est bien défini et convergeant uniformément dans $H_0^1(\Omega)$).

Comme $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, on a $u_n(t)^2 \leq 3(u_n^0)^2 + 3\frac{(u_n^1)^2}{\lambda_n} + \frac{3}{\lambda_n} \int_{[0,T]^2} |f_n(s)||f_n(r)| ds dr$

Par Fubini et Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,T]^2} |f_n(s)||f_n(r)| ds dr \leq \int_{[0,T]^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(s)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)^2 \right)^{\frac{1}{2}} ds dr = \|f\|_{L^1(]0,T[,L^2(\Omega))}^2$$

On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n(t)^2 \leq 3(\|u^0\|_{H_0^1}^2 + \|u^1\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^1(]0,T[,L^2(\Omega))}^2) < +\infty$ et $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, avec convergence normale de la série, ce qui montre la continuité de u de $[0,T]$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On pose « $u'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(t) e_n$ » (on veut montrer que c'est bien défini et convergeant uniformément dans $L^2(\Omega)$, c'est alors la dérivée temporelle de u).

On a $u'_n(t) = -\sqrt{\lambda_n}u_n^0 \sin \sqrt{\lambda_n}t + u_n^1 \cos \sqrt{\lambda_n}t + \int_0^t f_n(s) \cos \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds$.

Donc avec le même type de majorations que précédemment, on obtient que $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(t)^2 < +\infty$

et $u'(t) \in L^2(\Omega)$, avec convergence normale de la série, ce qui montre la continuité de la dérivée (de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$). Cela montre par la même occasion que u' est la dérivée de u (convergence normale d'une série de dérivées).

On a bien $u(0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0 e_n = u^0$ et $u'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^1 e_n = u^1$.

On pose $u^N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t) e_n \in H_0^1(\Omega)$ et $f^N(t) = \sum_{n=0}^N f_n(t) e_n \in L^2(\Omega)$ (défini pour presque tout $t \in [0, T]$). On a, par intégration par parties, pour tout $\psi \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$ à support compact en x :

$$\int_{]0, T[\times \Omega} (-u^{N'} \psi' + \nabla u^N \nabla \psi) + \left[\int_{\Omega} u^{N'} \psi \right]_0^T = \int_{]0, T[\times \Omega} f^N \psi. \quad (15)$$

Cette égalité passe à la limite d'après ce qu'on a fait précédemment.

Enfin, si v est solution de (13), si $\psi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, on pose $(v_n, \psi) = \int_{]0, T[\times \Omega} v \psi e_n$, alors v_n est une distribution qui vérifie la même équation différentielle que u_n , avec les mêmes conditions initiales. Donc $u = v$ ce qui montre l'unicité. \diamond

Remarque 2.2.2 *On voit que la solution dépend de manière continue des états initiaux u^0 et u^1 . Plus précisément, il existe $C > 0$ tel que si u est la solution associée à (u^0, u^1) et au contrôle f , on a pour tout $t \in [0, T]$, $\|u(t)\|_{H_0^1} + \|u'(t)\|_{L^2} \leq C(\|u^0\|_{H_0^1} + \|u^1\|_{L^2} + \|f\|_{L^1(]0, T[, L^2(\Omega))})$ (voir les majorations dans la démonstration).*

Donc si v est la solution associée à (v^0, v^1) pour le même contrôle f , on a, par différence, pour tout $t \in [0, T]$, $\|u(t) - v(t)\|_{H_0^1} + \|u'(t) - v'(t)\|_{L^2} \leq C(\|u^0 - v^0\|_{H_0^1} + \|u^1 - v^1\|_{L^2})$

Remarque 2.2.3 *Comme l'équation des ondes est invariante par renversement du temps, on obtient les mêmes résultats pour le système*

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u(T) = u_T^0, u'(T) = u_T^1 \end{cases} \quad (16)$$

En effet si u est la solution de (13) pour les conditions initiales $(u^0, u^1) = (v^0, v^1)$ et le contrôle f alors $\tilde{u} : (t, x) \mapsto u(T - t, x)$ est la solution de (16) pour les conditions finales $(u_T^0, u_T^1) = (v^0, -v^1)$ et le contrôle $\tilde{f} : (t, x) \mapsto f(T - t, x)$.

On aura aussi besoin de considérer dans la suite le système adjoint suivant, en s'intéressant à des solutions plus faibles, dites « de transposition ». On remarque qu'il s'agit du même système (sans le second membre), mais en fait on l'étudie à un autre degré de régularité.

$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta \varphi = 0 \\ \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \varphi(0) = \varphi^0, \varphi'(0) = \varphi^1 \end{cases} \quad (17)$$

Théorème 2.2

Pour (φ^0, φ^1) dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on a existence et unicité d'une solution faible de (17) dans $C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\Omega))$.

Ici le sens de la solution doit être de nouveau précisé : l'interprétation de $u = 0$ sur $\partial\Omega$ par $u \in H_0^1(\Omega)$ n'a plus de sens : on ne peut pas définir de trace dans L^2 . On dit que $\varphi \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T], H^{-1}(\Omega))$ est solution faible de (17) si $\varphi(0) = \varphi^0, \varphi'(0) = \varphi^1$ et

$$\forall f \in \mathcal{D}(]0, T[\times \Omega), \int_{]0, T[\times \Omega} f \varphi = -(\varphi^0, u'(0)) + \langle \varphi^1, u(0) \rangle \quad (18)$$

où u est la solution de (16) avec le second membre f et les états finaux nuls ($u_T^0 = u_T^1 = 0$).

Remarque 2.2.4 On peut noter qu'une solution au sens du théorème 2.1 est une solution faible au sens de ce dernier théorème. Si φ est la solution de (17) au sens du théorème 2.1, on a $\varphi \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ et d'après la remarque 2.2.1, on a :

$$\int_{]0, T[\times \Omega} (-u' \varphi' + \nabla u \nabla \varphi - f \varphi) = - \left[\int_{\Omega} u' \varphi \right]_0^T \quad (19)$$

Puisque φ est solution de (17) et $u \in C([0, T], H_1^0(\Omega))$, on a de même

$$\int_{]0, T[\times \Omega} (-u' \varphi' + \nabla u \nabla \varphi) = - \left[\int_{\Omega} \varphi' u \right]_0^T \quad (20)$$

Ainsi on obtient

$$\int_{]0, T[\times \Omega} f \varphi = \left[\int_{\Omega} u' \varphi \right]_0^T - \left[\int_{\Omega} \varphi' u \right]_0^T \quad (21)$$

Or, ($u_T^0 = u_T^1 = 0$), d'où le résultat.

Démonstration D'après la remarque 2.2.2 on sait qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{D}(]0, T[\times \Omega)$, $\|u(0)\|_{H_0^1} + \|u'(0)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^1(]0, T[, L^2(\Omega))}$, (où u est la solution de (16) avec le second membre f et les états finaux nuls ($u_T^0 = u_T^1 = 0$)).

On pose Φ la forme linéaire $f \mapsto -(\varphi^0, u'(0)) + \langle \varphi^1, u(0) \rangle$ (où u est la solution de (16) avec le second membre $f \in \mathcal{D}(]0, T[\times \Omega)$ et les états finaux nuls ($u_T^0 = u_T^1 = 0$)). Il existe donc $C > 0$ tel que

$$\Phi(f) \leq C (\|\varphi^0\|_{L^2} + \|\varphi^1\|_{H^{-1}}) \|f\|_{L^1(]0, T[, L^2(\Omega))}.$$

Φ s'étend donc en une forme linéaire continue sur $L^1(]0, T[, L^2(\Omega))$, identifiée avec une fonction $\varphi \in L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega))$, qui vérifie donc (18), avec $\|\varphi\|_{L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega))} \leq C (\|\varphi^0\|_{L^2} + \|\varphi^1\|_{H^{-1}})$.

Cette dernière inégalité nous permet de montrer le caractère continu de φ .

En effet soit $(\varphi_n^0, \varphi_n^1)$ tendant vers (φ^0, φ^1) dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, avec $(\varphi_n^0, \varphi_n^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On pose φ_n la solution de (17) au sens du théorème 2.1 (donc au sens faible, vérifiant cette dernière inégalité) pour les conditions initiales $(\varphi_n^0, \varphi_n^1)$, alors $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformément dans $L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega))$. Comme $\varphi_n \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \subset C([0, T], L^2(\Omega))$, alors $\varphi \in C([0, T], L^2(\Omega))$.

Il reste à montrer que $\varphi' \in L^\infty(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, et plus précisément que l'application linéaire $(\varphi^0, \varphi^1) \mapsto \varphi'$ est continue de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ dans $L^\infty(]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, et on pourra obtenir la continuité par le même procédé.

On pose Φ' la forme linéaire qui à $f \in \mathcal{D}(]0, T[\times \Omega)$ associe $-(\varphi^0, v'(0)) + \langle \varphi^1, v(0) \rangle$ (où v est la solution de (16) avec le second membre $-\frac{df}{dt}$ et les états finaux nuls ($v_T^0 = v_T^1 = 0$)).

On reprend les expressions des solutions dans la démonstration du théorème 2.1. On obtient $v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t)e_n$ avec $v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{T-t} \left(-\frac{df}{dt}\right)_n (T-s) \sin \sqrt{\lambda_n}((T-t)-s) ds$. Comme $f \in \mathcal{D}(\]0, T[\times\Omega)$, on a que $\left(\frac{df}{dt}\right)_n = \frac{df_n}{dt}$ et, après changement de variable et intégration par parties $v_n(t) = \int_t^T f_n(s) \cos \sqrt{\lambda_n}(t-s) ds$.

On effectue les mêmes majorations que dans la démonstration du théorème 2.1 pour v_n et v'_n et on obtient que pour tout $t \in [0, T]$, $\|v(t)\|_{H_0^1} + \|v'(t)\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^1(\]0, T[, H_0^1(\Omega))}$. On a donc :

$$\Phi'(f) \leq C(\|\varphi^0\|_{L^2} + \|\varphi^1\|_{H^{-1}})\|f\|_{L^1(\]0, T[, H_0^1(\Omega))}.$$

La forme linéaire Φ' s'étend donc en une forme linéaire continue sur $L^1(\]0, T[, H_0^1(\Omega))$, identifiée avec une fonction $\varphi' \in L^\infty(\]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, qui vérifie donc

$$\forall f \in \mathcal{D}(\]0, T[\times\Omega), \int_{\]0, T[\times\Omega} f\varphi' = -(\varphi^0, v'(0)) + \langle \varphi^1, v(0) \rangle$$

(où v est la solution de (16) avec le second membre $-\frac{df}{dt}$ et les états finaux nuls ($v_T^0 = v_T^1 = 0$)) et donc

$$\forall f \in \mathcal{D}(\]0, T[\times\Omega), \int_{\]0, T[\times\Omega} f\varphi' = \Phi\left(-\frac{df}{dt}\right) = \int_{\]0, T[\times\Omega} -\frac{df}{dt}\varphi$$

φ' est donc bien la dérivée temporelle de φ au sens des distributions, et on a

$$\|\varphi'\|_{L^\infty(\]0, T[, H^{-1}(\Omega))} \leq C(\|\varphi^0\|_{L^2} + \|\varphi^1\|_{H^{-1}})$$

Ceci permet de montrer, comme précédemment, la continuité de φ' de $[0, T]$ dans $H^{-1}(\Omega)$, et par conséquent, φ' est bien la dérivée (au sens usuel) de φ . \diamond

Remarque 2.2.5 *On a continuité de la solution par rapport aux conditions initiales :*

$$\|\varphi(t)\|_{L^2} + \|\varphi'(t)\|_{H^{-1}} \leq C(\|\varphi^0\|_{L^2} + \|\varphi^1\|_{H^{-1}})$$

(voir les majorations dans la démonstration)

Remarque 2.2.6 *On a le même résultat que la remarque 2.2.3, en utilisant la même transposition :*

On considère le système adjoint suivant :

$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta\varphi = 0 \\ \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \varphi(T) = \varphi_T^0, \varphi'(T) = \varphi_T^1 \end{cases} \quad (22)$$

Pour $(\varphi_T^0, \varphi_T^1)$ dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on a existence et unicité d'une solution faible de (17) dans $C(\]0, T[, L^2(\Omega)) \cap C^1(\]0, T[, H^{-1}(\Omega))$, au sens où :

$$\forall f \in \mathcal{D}(\]0, T[\times\Omega), \int_{\]0, T[\times\Omega} f\varphi = (\varphi_T^0, u'(T)) - \langle \varphi_T^1, u(T) \rangle$$

où u est la solution de (13) avec le second membre f et les états initiaux nuls ($u^0 = u^1 = 0$).

En effet si φ est la solution de (17) pour les états initiaux (φ^0, φ^1) , alors $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(T-t)$ est la solution de (22) pour les états finaux $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) = (\varphi^0, -\varphi^1)$ (on utilise les expressions de la remarque 2.2.3 pour le montrer).

2.3 Problèmes de contrôlabilité

On revient au problème initial, avec un contrôle qui n'agit que sur ω . On fixe $T > 0$ et on pose pour (u^0, u^1) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} R(T; (u^0, u^1)) &= \{\text{états atteignables au temps } T \text{ partant de } (u^0, u^1)\} \\ &= \{(u(T), u'(T)) \mid u \text{ solution de (12) pour } f \text{ parcourant } L^1(]0, T[, L^2(\omega))\} \end{aligned}$$

Définition 2.3.1 1. Le système (12) est dit approximativement contrôlable ssi

$$\forall (u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), R(T; (u^0, u^1)) \text{ est dense dans } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

2. Le système (12) est dit exactement contrôlable ssi

$$\forall (u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), R(T; (u^0, u^1)) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

3. Le système (12) est dit zéro-contrôlable ssi $\forall (u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), 0 \in R(T; (u^0, u^1))$

Remarque 2.3.1 $R(T; (u^0, u^1))$ est un sous-espace affine de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. En effet, si (u_T^0, u_T^1) est l'état atteint au temps T avec le contrôle identiquement nul, on a

$$R(T; (u^0, u^1)) = R(T; (0, 0)) + (u_T^0, u_T^1).$$

On peut donc remplacer (u^0, u^1) par $(0, 0)$ dans les définitions de contrôlabilité exacte et approchée.

Dans le cas de la dimension finie, un sous-espace affine n'est dense que s'il vaut l'espace tout entier, donc on a équivalence entre contrôlabilité exacte et approchée.

Proposition 2.3.1 (12) exactement contrôlable \Leftrightarrow (12) zéro-contrôlable

Démonstration (\Rightarrow) est immédiat, et pour (\Leftarrow), si de tout état initial, on peut atteindre $(0, 0)$ au temps T , alors par invariance par renversement du temps, de l'état $(0, 0)$, on peut atteindre n'importe quel état au temps T , et on utilise alors la remarque précédente. \diamond

On retiendra en pratique comme définition de l'exacte contrôlabilité le fait que de tout état initial $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, il existe $f \in L^1(]0, T[, L^2(\omega))$ telle que la solution de (12) vaille 0 au temps T .

Remarque 2.3.2 Les principales caractéristiques de l'équation des ondes nous permettent déjà de faire quelques remarques.

Tout d'abord, comme l'équation d'onde n'a pas d'effet régularisant (pas de terme dissipatif par exemple), on peut bien chercher à atteindre tout l'espace (on ne « perd » pas de fonctions à cause d'un effet régularisant...), la contrôlabilité exacte a des chances d'avoir lieu.

Puis, comme la vitesse de propagation c (ici égale à un) des ondes est constante et finie (au sens où la valeur de la solution au temps T et au point x ne dépend que des valeurs prises sur la boule de centre x et de rayon cT au temps 0), on n'aura de résultats de contrôlabilité que pour T assez grand (dépendant de la géométrie de Ω et de ω).

2.4 Approche variationnelle du problème : la méthode H.U.M.

Dans le cas de la dimension finie, on a vu une équivalence entre contrôlabilité exacte et une certaine condition « d'observabilité ». Ici on va définir une notion analogue de contrôlabilité et montrer qu'elle implique la contrôlabilité exacte. La méthode utilisée s'appelle H.U.M. pour Hilbert Uniqueness Method et est due à Jacques-Louis Lions (voir par exemple [3]).

Lemme 2.1 *Le contrôle $f \in L^1(]0, T[, L^2(\omega))$ permet de passer de $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ à 0 au temps T si et seulement si pour tout $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, en notant φ l'unique solution faible de (22), on a*

$$\int_0^T \int_{\omega} \varphi f dx dt = \langle \varphi'(0), u^0 \rangle - \int_{\Omega} \varphi(0) u^1 dx \quad (23)$$

Démonstration

Soit $f \in L^1(]0, T[, L^2(\omega))$, $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et u la solution de (12) associée.

On suppose d'abord que $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. En reprenant les calculs de la remarque 2.2.4, on obtient la même chose que (21), pour φ la solution (au sens du théorème 2.1) de (22) :

$$\int_{]0, T[\times \omega} f \varphi = -(\varphi(0), u^1) + \langle \varphi'(0), u^0 \rangle + (\varphi_T^0, u'(T)) - \langle \varphi_T^1, u(T) \rangle$$

Par densité, on utilise la remarque 2.2.5 de continuité par rapport aux conditions initiales, pour obtenir cette dernière égalité pour tout $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, avec φ la solution faible de (22) associée. On a alors

$$\begin{aligned} u(T) = u'(T) = 0 &\Leftrightarrow \forall (\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), (\varphi_T^0, u'(T)) - \langle \varphi_T^1, u(T) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow (23) \text{ pour tout } (\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration \diamond

On définit maintenant un produit de dualité entre $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ par :

$$\langle (\varphi^0, \varphi^1) | (u^0, u^1) \rangle = \langle \varphi^1, u^0 \rangle - \int_{\Omega} \varphi^0 u^1 dx$$

On considère maintenant le système adjoint avec conditions initiales (17) (et non plus finales), pour $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

On obtient la même relation :

Lemme 2.2 *Le contrôle $f \in L^1(]0, T[, L^2(\omega))$ permet de passer de $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ à 0 au temps T si et seulement si pour tout $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$*

$$\int_0^T \int_{\omega} \varphi f dx dt = \langle (\varphi^0, \varphi^1) | (u^0, u^1) \rangle, \quad (24)$$

où φ est l'unique solution faible de (17) pour les conditions initiales $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Démonstration

Il suffit de voir que si φ est la solution de (22) avec les états finaux $(\varphi_T^0, \varphi_T^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, c'est aussi la solution de (17) avec les états initiaux $(\varphi^0 = \varphi(0), \varphi^1 = \varphi'(1)) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, et réciproquement. \diamond

Cette relation peut être alors formulée de manière variationnelle, f étant vue comme un « point critique » de la fonctionnelle $\mathcal{J} : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\mathcal{J}(\varphi^0, \varphi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dx dt - \langle (\varphi^0, \varphi^1) | (u^0, u^1) \rangle \quad (25)$$

Théorème 2.3 *Si $(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1)$ minimise \mathcal{J} , on pose $f(t) = \tilde{\varphi}(t)|_{\omega}$ et f est un contrôle qui ramène (u^0, u^1) à 0 au temps T .*

Démonstration Soit $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\mathcal{J}((\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) + h(\varphi^0, \varphi^1)) - \mathcal{J}((\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1))) &= \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\varphi} \varphi dx dt - \langle (\varphi^0, \varphi^1), (u^0, u^1) \rangle \\ &+ \frac{h}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dx dt, \end{aligned}$$

qui est du signe de h . On fait tendre h vers 0 pour $h > 0$ puis pour $h < 0$, pour obtenir que $\int_0^T \int_{\omega} \tilde{\varphi} \varphi dx dt - \langle (\varphi^0, \varphi^1), (u^0, u^1) \rangle = 0$, c'est à dire (24) pour $f = \tilde{\varphi}|_{\omega}$. \diamond

On cherche maintenant des conditions suffisantes pour que \mathcal{J} atteigne un minimum. Cela nous amène à poser une définition importante.

Définition 2.4.1 L'équation (17) est dite observable au temps T s'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ l'inégalité suivante appelée inégalité d'observabilité est vérifiée :

$$C_1 \|(\varphi^0, \varphi^1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 \leq \int_0^T \int_{\omega} |\varphi|^2 dx dt,$$

où φ est la solution de (17) associée aux conditions initiales $(\varphi^0, \varphi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Remarque 2.4.1 On a déjà l'inégalité dans l'autre sens (avec une autre constante C_2) par continuité de la solution de (17) par rapport aux conditions initiales (on utilise le fait que ω est borné et la remarque 2.2.5).

On cherche à montrer que cette inégalité d'observabilité est une condition suffisante pour la contrôlabilité du système (13). On rappelle un résultat vu en cours d'analyse fonctionnelle (pour la démonstration, voir par exemple [2]).

Proposition 2.4.1 Soit E un espace de Banach réflexif, $A \subset E$ un convexe fermé non vide et $J : A \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement (s.c.i.), $J \neq +\infty$ telle que

$$\lim_{x \in A, \|x\| \rightarrow \infty} J(x) = +\infty$$

Alors J atteint son minimum sur A .

Théorème 2.4

On suppose que (17) est observable au temps T . Alors pour $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, la fonctionnelle \mathcal{J} définie par (25) atteint son minimum en $(\tilde{\varphi}^0, \tilde{\varphi}^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, et le système (12) est contrôlable au temps T .

Démonstration À l'aide de la proposition précédente, comme \mathcal{J} est convexe est continue, et que l'espace considéré est réflexif (car uniformément convexe par exemple pour H_0^1 , donc pour H^{-1}), il suffit de montrer que \mathcal{J} tend vers l'infini en l'infini. Or cette « coercivité » est immédiate d'après la condition d'observabilité. \diamond

2.5 Contrôlabilité approchée

2.5.1 Introduction

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons cette fois à la contrôlabilité approchée de l'équation des ondes avec contrôle intérieur. En d'autres termes, si on se fixe un $\varepsilon > 0$ et des états initiaux (u_0, u_1) et finaux (v_0, v_1) dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on recherche une fonction $f \in L^1(]0, T[, L^2(\omega))$ telle que la solution correspondante de (12) vérifie :

$$\|(u(T), u'(T)) - (v_0, v_1)\|_{H_0^1 \times L^2} \leq \varepsilon$$

On peut supposer sans perte de généralité que $(u_0, u_1) = (0, 0)$ (voir la remarque 2.3.1). Comme pour la contrôlabilité exacte, on utilise une approche variationnelle.

2.5.2 Approche variationnelle

Introduisons la fonctionnelle suivante : $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J_\varepsilon(\varphi^0, \varphi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dx dt - \langle (\varphi_0, \varphi_1), (z_0, z_1) \rangle + \varepsilon \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}$$

où φ désigne la solution du système adjoint (17) avec pour conditions initiales (φ_0, φ_1) .

Comme pour le cas de la contrôlabilité exacte, l'existence d'un minimum pour J_ε entraîne l'existence d'un contrôle approché.

Théorème 2.5 *Soit $\varepsilon > 0$ et $(z_0, z_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et supposons que $(\widetilde{\varphi}_0, \widetilde{\varphi}_1)$ soit un minimiseur de J_ε . Alors si $\widetilde{\varphi}$ est la solution du système adjoint (17) correspondante, on pose $f(t) = \widetilde{\varphi}(t)|_\omega$, et f est un contrôle approché qui conduit la solution d'un état initial $(0, 0)$ à un état final approchant (z_0, z_1) à ε près.*

On peut alors caractériser les systèmes approximativement contrôlables.

Théorème 2.6 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'équation des ondes est approximativement contrôlable.*
2. *Le principe « d'unicité » suivant est vérifié pour les solutions du système adjoint :*

$$\varphi_{[0, T] \times \omega} = 0 \Rightarrow (\varphi_0, \varphi_1) = (0, 0)$$

3 Inégalités d'Ingham et application à l'équation des ondes unidimensionnelle

On introduit ici les inégalités d'Ingham et on les utilise pour prouver la condition d'observabilité pour l'équation des ondes unidimensionnelle avec un terme supplémentaire de rappel, ce qui montre *a posteriori* la contrôlabilité exacte de l'équation.

3.1 Inégalités d'Ingham

Les inégalités d'Ingham correspondent à une généralisation de l'égalité de Parseval ; dans ce paragraphe, on n'introduit que des inégalités *élémentaires*, sachant que bien des prolongements ont été donnés au début du siècle dernier.

Théorème 3.1 (*Ingham*) Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels et $\gamma > 0$ vérifiant :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0$$

Alors pour tout $T > 0$ tel que :

$$T > \frac{\pi}{\gamma}$$

il existe une constante $C_1 > 0$ dépendant de T et γ telle que pour toute suite réelle (finie) $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \quad (26)$$

Démonstration

Pour commencer on peut réduire le problème à l'étude du cas $T = \pi$ et $\gamma > 1$. En effet si T et γ vérifient $T\gamma > \pi$, alors :

$$\int_{-T}^T \left| \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_n a_n e^{i \frac{T\lambda_n}{\pi} s} \right|^2 ds = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds$$

avec $\mu_n = \frac{T\lambda_n}{\pi}$. Il est clair que $\mu_{n+1} - \mu_n = T \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\pi} \geq \gamma_1 := \frac{T\gamma}{\pi} > 1$.

A présent, prouvons l'existence d'une constante $C'_1 > 0$ telle que :

$$C'_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt.$$

On définit la fonction

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = \begin{cases} \cos \frac{t}{2} & \text{si } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |t| > \pi \end{cases}$$

dont on peut calculer la transformée de Fourier $K(\xi)$:

$$K(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{it\xi} dt = \frac{4 \cos \pi \xi}{1 - 4\xi^2}. \quad (27)$$

D'autre part, comme $0 \leq h(t) \leq 1$, on a également :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt &\geq \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \\
&\geq \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\
&\geq K(0) \sum_n |a_n|^2 + \sum_{n \neq m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\
&\geq 4 \sum_n |a_n|^2 - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} (|a_n|^2 + |a_m|^2) |K(\mu_n - \mu_m)| \\
&\geq 4 \sum_n |a_n|^2 - \sum_n |a_n|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq n} |K(\mu_n - \mu_m)|
\end{aligned}$$

Notons également que

$$\begin{aligned}
\sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq n} |K(\mu_n - \mu_m)| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq n} \frac{4}{4|\mu_n - \mu_m|^2 - 1} \\
&\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq n} \frac{4}{4\gamma_1^2 |n - m|^2 - 1} \\
&\leq 8 \sum_{r \geq 1} \frac{1}{4\gamma_1^2 r^2 - 1} = \sum_{r \geq 1} \frac{4}{\gamma_1^2} \left(\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r+1} \right) = \frac{4}{\gamma_1^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \geq \underbrace{\left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right)}_{C'_1 > 0} \sum_n |a_n|^2.$$

On peut donc prendre

$$C_1 = \frac{T}{\pi} C'_1 = \frac{T}{\pi} \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) = \frac{4}{T\pi} \left(T^2 - \frac{\pi^2}{\gamma_1^2} \right) > 0$$

ce qui permet de conclure. \diamond

L'inégalité dans l'autre sens est également vérifiée et elle a ceci de remarquable qu'elle est valable pour tout T .

Théorème 3.2 (Ingham) Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels et $\gamma > 0$ vérifiant :

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0$$

Alors pour tout $T > 0$ il existe une constante $C_2 > 0$ dépendant de T et γ telle que pour toute suite réelle finie $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{28}$$

Démonstration

Supposons pour commencer que $T\gamma \geq \frac{\pi}{2}$. Comme précédemment on peut réduire le problème au cas $T = \frac{\pi}{2}$ et $\gamma \geq 1$.

$$\int_{-T}^T \left| \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \quad (29)$$

avec $\mu_n = 2T \frac{\lambda_n}{\pi}$, tel que $\mu_{n+1} - \mu_n = 2T \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\pi} \geq \gamma_1 := \frac{2T\gamma}{\pi} \geq 1$.

Soit h la fonction définie dans la preuve précédente.
Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq h(t) \leq 1$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt &\leq 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(t) \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \\ &\leq 2 \int_{\pi}^{\pi} h(t) \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \\ &\leq 2 \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\ &\leq 8 \sum_n |a_n|^2 + \sum_{n \neq m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\ &\leq 8 \sum_n |a_n|^2 + \sum_{n \neq m} (|a_n|^2 + |a_m|^2) |K(\mu_n - \mu_m)| \end{aligned}$$

On a vu dans la preuve précédente que :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}, m \neq n} |K(\mu_n - \mu_m)| \leq \frac{4}{\gamma_1^2}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \leq 8 \sum_n |a_n|^2 + \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_n |a_n|^2$$

Or $\gamma_1 \geq 1$, donc on obtient donc la conclusion souhaitée avec $C_2 = \frac{2T}{\pi} 8 \left(1 + \frac{1}{\gamma_1^2} \right) \leq \frac{32T}{\pi}$.

Dans le cas $T\gamma < \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_{-T}^T \left| \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{1}{\gamma} \int_{T\gamma}^{T\gamma} \left| \sum_n a_n e^{i \frac{\lambda_n}{\gamma} s} \right|^2 ds \leq \frac{1}{\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_n a_n e^{i \frac{\lambda_n}{\gamma} s} \right|^2 ds$$

Or ici on a $\frac{\lambda_{n+1}}{\gamma} - \frac{\lambda_n}{\gamma} \geq 1$, donc d'après les calculs du cas précédent,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_n a_n e^{i \frac{\lambda_n}{\gamma} s} \right|^2 ds \leq 16 \sum_n |a_n|^2$$

Finalement si on prend $C_2 = \max\left(\frac{16}{\gamma}, \frac{32T}{\pi}\right)$, on obtient l'inégalité souhaitée. \diamond

Il est possible d'affiner ces résultats et obtenir le théorème (3.1) pour des T dans un domaine plus grand. La preuve inductive qui suit est due au mathématicien Haraux.

Théorème 3.3 (Haraux) *Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels et $\gamma > 0$ vérifiant :*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0$$

Alors pour tout $T > 0$ vérifiant $T > \frac{\pi}{\gamma_\infty}$ avec $\gamma_\infty = \liminf_{|n| \rightarrow \infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$ il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour toute suite réelle finie $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \quad (30)$$

Démonstration

Fixons $T > \frac{\pi}{\gamma_\infty}$.

L'inégalité de « droite » est une conséquence directe du théorème précédent. Il nous suffit donc de prouver l'inégalité de « gauche » ; pour cela fixons un $\delta > 0$ tel que $T > \frac{\pi}{\gamma_\infty - \delta}$ et remarquons que par définition de la limite inférieure, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$:

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \gamma_\infty - \delta \quad (31)$$

D'après l'équation précédente et les deux premières inégalités d'Ingham appliquées à la famille $(e^{i\lambda_n t})_{|n| > N}$, pour tout $T' > \frac{\pi}{\gamma_\infty - \delta}$, il existe $C_1^{T'}, C_2^{T'} > 0$ tels que pour toute famille $(b_n)_{|n| > N}$:

$$C_1^{T'} \sum_{|n| > N} |b_n|^2 \leq \int_{-T'}^{T'} \left| \sum_{|n| > N} b_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2^{T'} \sum_{|n| > N} |b_n|^2 \quad (32)$$

Considérons alors la fonction « filtrée » $f_0(t) = \sum_{|n| > N} a_n e^{i\lambda_n t}$. On va essayer d'ajouter les termes manquants un par un : considérons pour commencer $f_1(t) = f_0(t) + a_N e^{i\lambda_N t}$. Quitte à considérer $f_1(t)e^{-i\lambda_N t}$ à la place de $f_1(t)$, on peut supposer que $\lambda_N = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $T' := T - \varepsilon > \frac{\pi}{\gamma_\infty - \varepsilon}$. Considérons la fonction définie par :

$$g(t) = \int_0^\varepsilon (f_1(t + \eta) - f_1(t)) d\eta = \sum_{|n| > N} a_n \left(\frac{e^{i\lambda_n \varepsilon} - 1}{i\lambda_n} - \varepsilon \right) e^{i\lambda_n t} \quad (33)$$

Par (32) appliquée à la fonction $h(t)$, on a :

$$C_1^{T'} \sum_{|n| > N} \left| \frac{e^{i\lambda_n \varepsilon} - 1}{i\lambda_n} - \varepsilon \right|^2 |a_n|^2 \leq \int_{-T'}^{T'} \left| \int_0^\varepsilon (f_1(t + \eta) - f_1(t)) d\eta \right|^2 dt \quad (34)$$

De plus,

$$\begin{aligned} |e^{i\lambda_n \varepsilon} - 1 - i\lambda_n \varepsilon|^2 &= |\cos(\lambda_n \varepsilon) - 1|^2 + |\sin(\lambda_n \varepsilon) - \lambda_n \varepsilon|^2 \\ &= 4 \sin^4 \left(\frac{|\lambda_n| \varepsilon}{2} \right) + (\sin(\lambda_n \varepsilon) - \lambda_n \varepsilon)^2 \end{aligned}$$

Si $|\lambda_n| \varepsilon \geq \pi$, alors $(\sin(\lambda_n \varepsilon) - \lambda_n \varepsilon)^2 \geq (|\lambda_n| \varepsilon - 1)^2 \geq \frac{1}{2}(\lambda_n \varepsilon)^2$.

Si $|\lambda_n| \varepsilon \leq \pi$, alors on remarque que $\frac{|\lambda_n| \varepsilon}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et par concavité de $\sin(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$. Donc $4 \sin^4 \left(\frac{|\lambda_n| \varepsilon}{2} \right) \geq 4 \left(\frac{|\lambda_n| \varepsilon}{\pi} \right)^4$.

Ainsi,

$$\left| \frac{e^{i\lambda_n \varepsilon} - 1}{i\lambda_n} - \varepsilon \right|^2 \geq \min \left\{ 4 \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \right)^4 |\lambda_n|^2, \frac{\varepsilon^2}{2} \right\}$$

De plus puisque $\lambda_N = 0$, $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \gamma$ et (λ_n) croissante, $|\lambda_n| \geq \gamma$ pour $n \neq N$ et on a :

$$\left| \frac{e^{i\lambda_n \varepsilon} - 1}{i\lambda_n} - \varepsilon \right|^2 \geq \underbrace{\min \left\{ 4 \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \right)^4 \gamma^2, \frac{\varepsilon^2}{2} \right\}}_C$$

En remplaçant cette inégalité dans l'équation (34), on en déduit que :

$$C_1^{T'} C \sum_{|n| > N} |a_n|^2 \leq \int_{-T'}^{T'} \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f_1(t+\eta) - f_1(t)) d\eta \right|^2 dt \quad (35)$$

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \int_{-T'}^{T'} \left| \int_0^{\varepsilon} (f_1(t+\eta) - f_1(t)) d\eta \right|^2 dt &\leq \int_{-T'}^{T'} \varepsilon \int_0^{\varepsilon} |f_1(t+\eta) - f_1(t)|^2 d\eta dt \\ &\leq 2\varepsilon \int_{-T'}^{T'} \varepsilon \int_0^{\varepsilon} (|f_1(t+\eta)|^2 + |f_1(t)|^2) d\eta dt \\ &\leq 2\varepsilon^2 \int_{-T'}^{T'} |f_1(t)|^2 dt + 2\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \int_{-T'}^{T'} |f_1(t+\eta)|^2 dt d\eta \\ &\leq 2\varepsilon^2 \int_{-T'}^{T'} |f_1(t)|^2 dt + 2\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \int_{-T'+\eta}^{T'+\eta} |f_1(s)|^2 ds d\eta \\ &\leq 2\varepsilon^2 \int_{-T'}^{T'} |f_1(t)|^2 dt + 2\varepsilon \int_0^{\varepsilon} \int_{-T}^T |f_1(s)|^2 ds d\eta \\ &\leq 4\varepsilon^2 \int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt \end{aligned}$$

En remplaçant cette inégalité dans (35), on a :

$$\frac{C_1^{T'} C}{4\varepsilon^2} \sum_{|n| > N} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt \quad (36)$$

Enfin $\forall t \in [-T, T]$,

$$|a_N|^2 = \left| f_1(t) - \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2$$

En particulier on a donc :

$$\begin{aligned} |a_N|^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| f_1(t) - \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt + \int_{-T}^T \left| \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt + C_2^T \sum_{|n|>N} |a_n|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{T} \left(1 + \frac{C_2^T}{C_1^T} \right) \int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Par (36) on en déduit :

$$\left(\frac{C_1^T C}{4\varepsilon^2} + T \frac{C_1^T}{C_1^T + C_2^T} \right) \left(\sum_{|n|>N} |a_n|^2 + |a_N|^2 \right) \leq \int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt$$

D'autre part d'après le théorème d'Ingham (3.2), il existe $D_2^T > 0$ tel que :

$$\int_{-T}^T |f_1(t)|^2 dt \leq D_2^T \left(\sum_{|n|>N} |a_n|^2 + |a_N|^2 \right),$$

ce qui correspond aux mêmes inégalités que (32), avec un terme en plus en $a_N e^{i\lambda_N t}$.

On peut donc considérer la fonction $f_2(t) = f_1(t) + a_{N-1} e^{i\lambda_{N-1} t}$ et refaire de même. En répétant cet argument pour les termes restants ($n = -N, \dots, N-2$), on obtient l'inégalité souhaitée. \diamond

3.2 Application à l'équation des ondes unidimensionnelle

3.2.1 Observabilité pour la contrôlabilité intérieure

Le problème de contrôlabilité des ondes *unidimensionnelle* avec une force de rappel peut se formuler comme suit : étant donné un intervalle $J \subset [0, 1]$ de longueur non nulle, une constante $\alpha \geq 0$, un temps $T \geq 2$ et $(u_0, u_1) \in H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$, on cherche $f \in L^2(]0, T[\times J)$ telle que la solution u du problème suivant vérifie $u(T) = u'(T) = 0$.

$$\begin{cases} u'' - u_{xx} + \alpha u = f 1_J & \text{pour } x \in (0, 1) \text{ et } t \in (0, T) \\ u(., 0) = u(., 1) = 0 \\ u(0, .) = u^0, u'(0, .) = u^1 \end{cases} \quad (37)$$

On peut montrer comme pour le théorème (2.4), que ce problème a une solution si la condition d'observabilité, énoncée ci-dessous, est vérifiée :

Pour tout couple $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(]0, 1[) \times H^{-1}(]0, 1[)$ si on appelle φ la solution de l'équation adjointe

$$\begin{cases} \varphi'' - \varphi_{xx} + \alpha u = 0 & \text{pour } x \in [0, 1] \text{ et } t \in [0, T] \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi(\cdot, 1) = 0 \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi^0, \varphi'(0, \cdot) = \varphi^1 \end{cases} \quad (38)$$

alors on a :

$$C_1 \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 \leq \int_0^T \int_J |\varphi(t, x)|^2 dx dt \quad (39)$$

3.2.2 Analyse spectrale de l'équation des ondes adjointe

L'équation (37) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi' + A\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi^0 \end{cases} \quad (40)$$

avec $\Phi = (\varphi, z)$ et A un opérateur défini de $H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[) \times H^{-1}(]0, 1[)$ par :

$$A(\varphi, z) = (-z, -\partial_x^2 \varphi + \alpha \varphi) \quad (41)$$

L'opérateur A ainsi défini vérifie un certain nombre de propriétés intéressantes.

Proposition 3.2.1

L'opérateur A est un isomorphisme de $H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$ dans $L^2(]0, 1[) \times H^{-1}(]0, 1[)$. Si on munit $H_0^1(]0, 1[)$ du produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^1 \partial u \partial v + \alpha \int_0^1 uv$$

(équivalent au produit scalaire usuel) alors A est une isométrie bijective.

Lemme 3.1 Les valeurs propres de A sont les $\lambda_n = \text{sgn}(n)\pi i \sqrt{n^2 + \alpha}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ et les vecteurs propres correspondants sont les $\Phi^n = (\frac{1}{\lambda_n} \sin n\pi x, \sin n\pi x)$

Puisque A^{-1} est un opérateur compact autoadjoint, et comme les Φ^n forment une famille orthonormale dans $H_0^1 \times L^2$, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.2.2 Les Φ^n forment une base orthonormale de $H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$. De plus on a les équivalences suivantes :

$$\Phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n \Phi^n \in H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[) \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |a_n|^2 < \infty \quad (42)$$

$$\Phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n \Phi^n \in L^2(]0, 1[) \times H^{-1}(]0, 1[) \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|a_n|^2}{|\lambda_n|^2} < \infty \quad (43)$$

Enfin, on peut obtenir la forme générale des solutions si on a le développement de Fourier de la condition initiale :

Proposition 3.2.3 *Si la donnée initiale a pour expression*

$$\Phi^0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n \Phi^n \in L^2(]0, 1[) \times H^{-1}(]0, 1[)$$

alors la solution de (40) a pour expression

$$\Phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n e^{-\lambda_n t} \Phi^n \quad (44)$$

Nous avons à présent tous les outils pour introduire les théorèmes suivants qui donnent une réponse nette au problème de contrôlabilité.

3.2.3 Cas $\alpha = 0$

Dans le cas où il n'y a pas de force de rappel, il n'est pas nécessaire d'utiliser les inégalités d'Ingham, comme le montrent le théorème suivant et sa démonstration.

Théorème 3.4 *Si $T \geq 2$ alors il existe une constante C telle que la condition d'observabilité est vérifiée.*

Démonstration On conserve les mêmes notations que pour l'analyse spectrale de notre équation des ondes adjointe réalisée dans le paragraphe précédent.

Puisque $\alpha = 0$, les valeurs propres de l'opérateur A ont pour expression $\lambda_n = in\pi$. Notons que si l'on écrit $(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \Phi^n$, puisque A est une isométrie surjective de $H_0^1 \times L^2$ dans $L^2 \times H^{-1}$:

$$\begin{aligned} \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 &= \left\| A^{-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n \Phi^n \right) \right\|_{H_0^1 \times L^2}^2 \\ &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n \frac{1}{in\pi} \Phi^n \right\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |a_n|^2 \frac{1}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

D'après la proposition (3.2.3), φ solution de (38) avec pour conditions initiales (φ_0, φ_1) a pour expression :

$$\varphi(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{-in\pi t} \sin n\pi x.$$

D'autre part, comme $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], L^2(]0, 1[)) \subset L^2(]0, T[\times]0, 1[)$, le théorème de Fubini-Tonelli prouve que :

$$\int_0^T \int_J |\varphi(t, x)|^2 dx dt = \int_J \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| a_n e^{-in\pi t} \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right|^2 dt dx$$

Considérons pour commencer le cas $T = 2$. Puisque les fonctions exponentielles considérées forment une famille orthogonale dans $L^2([0, 2])$, on a :

$$\int_J \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| a_n e^{-in\pi t} \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right|^2 dt dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|a_n|^2}{n^2 \pi^2} \int_J \sin^2 n\pi x dx.$$

Si $T \geq 2$ il est clair que

$$\begin{aligned} \int_J \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| a_n e^{-in\pi t} \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right|^2 dt dx &\geq \int_J \int_0^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| a_n e^{-in\pi t} \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right|^2 dt dx \\ &\geq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|a_n|^2}{n^2 \pi^2} \int_J \sin^2 n\pi x dx. \end{aligned}$$

Vérifions que :

$$B = \inf_{n \in \mathbb{Z}^*} \underbrace{\int_J \sin^2 n\pi x dx}_{b_n} > 0$$

En effet,

$$b_n = \int_J \sin^2 n\pi x dx = \frac{|J|}{2} - \int_J \frac{\cos 2n\pi x}{2} dx \geq \frac{|J|}{2} - \frac{1}{2|n|\pi}.$$

Or $\frac{1}{2|n|\pi} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\forall n \geq n_0$, on ait :

$$b_n \geq \frac{|J|}{4} > 0$$

Ainsi,

$$\tilde{B} = \inf_{n \geq n_0} b_n > 0$$

et donc $B > 0$ étant donné que $b_n > 0$ pour tout entier n .

Par conséquent :

$$B \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|a_n|^2}{n^2 \pi^2} \leq \int_0^T \int_J |\varphi(t, x)|^2 dx dt$$

ce qui montre l'observabilité de l'équation. \diamond

Remarque 3.2.1 *On aurait pu utiliser les deux premières inégalités d'Ingham, mais la démonstration n'aurait fonctionné que pour le cas $T > 2$.*

Le résultat suivant est alors une conséquence directe du théorème précédent :

Théorème 3.5 *Si $T \geq 2$ alors le système est exactement contrôlable.*

3.2.4 Cas $\alpha > 0$

La présence d'un tel terme change tout, et la démonstration précédente n'est plus applicable. On peut néanmoins énoncer deux théorèmes en tout point semblables au précédents, mais dont la preuve nécessite des outils mathématiques plus fins, en l'occurrence les inégalités d'Ingham.

Théorème 3.6 *Si $T > 2$ alors il existe une constantes C telle que la condition d'observabilité est vérifiée.*

Démonstration

On rappelle que les valeurs propres de l'équation des ondes unidimensionnelle adjointe ont pour expression $\lambda_n = \text{sgn}(n)\pi i\sqrt{n^2 + \alpha}$. On pose :

$$\gamma = \inf\{\lambda_{n+1} - \lambda_n\} = \inf\left\{\frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{(n+1)^2 + \alpha} + \sqrt{n^2 + \alpha}}\right\} > \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha}}$$

$$\gamma_\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \pi.$$

Alors on a bien $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma$ et donc d'après la troisième inégalité d'Ingham, la condition d'observabilité est vérifiée pour $T > \frac{2\pi}{\gamma_\infty} = 2$, d'où le résultat. \diamond

Remarque 3.2.2 *Si on utilise la première inégalité d'Ingham, on obtient un temps qui dépend de la constante α , ce qui est bien moins intéressant.*

On en déduit donc que comme dans le cas sans force de rappel (seul le cas $T = 2$ est « perdu ») :

Théorème 3.7 *Si $T > 2$ alors le système est exactement contrôlable.*

Conclusion

On a obtenu des résultats concrets de contrôlabilité en dimension un. En dimension quelconque, un résultat général a été énoncé par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch (voir par exemple [1] ou [3]), qui a été démontré par des moyens d'analyse microlocale, ce qui dépasse largement le cadre de cet exposé de maîtrise.

Pour un ouvert Ω de classe C^∞ , l'inégalité d'observabilité est vérifiée si et seulement si la condition de contrôlabilité géométrique est vérifiée, c'est à dire que tout « rayon de l'optique géométrique » qui se propage dans Ω et se réfléchit sur sa frontière atteint la zone de contrôle ω en un temps inférieur à T . Par exemple le système de gauche ne peut être observable pour aucun $T > 0$, mais pour un temps assez grand, celui de droite sera observable.



Ce que l'on a obtenu dans le cas de la dimension un est bien un cas particulier de ce résultat, qui par la même occasion montre que la constante 2 est optimale.

Références

- [1] Claude BARDOS, Gilles LEBEAU, Jeff RAUCH, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Cont. Optim.*, 30 (1992), 1024-1065.
- [2] Haïm BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, Paris.
- [3] Jacques-Louis LIONS, *Contrôlabilité exacte : Perturbations et stabilisation de systèmes distribués, TOME 1 : Contrôlabilité exacte*, Masson, RMA, Paris, 1988.
- [4] Jacques-Louis LIONS, Enrico MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes (3 volumes)*, Dunod, 1968.
- [5] Sorin MICU, Enrique ZUAZUA, *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations.*

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ezuazua/informweb/argel.pdf

Nous tenons également à remercier Olivier Glass pour ses conseils, ses explications et ses fines analyses footballistiques.