

Introduction au thème de recherche : Modèles cinétiques pour l'étude de populations animales

Amic FROUVELLE

Sous la direction de Pierre DEGOND
(Institut de Mathématiques de Toulouse)

9 octobre 2008

Résumé

La majeure partie de mon stage de M2 a été basée sur l'article de P. Degond et S. Motsch [2], qui traite de limite hydrodynamique d'un modèle particulaire utilisé dans la modélisation de bancs de poissons, ou de nuées d'oiseaux. J'ai été amené à développer certains points proposés dans l'article qui n'avaient pas été encore traités. Je vais continuer à étudier ce genre de modélisation dans ma thèse qui sera également axée sur l'étude de propriétés géométriques des nuées d'oiseaux.

Le but de l'article [2] est d'établir une limite de type champ moyen (lorsque le nombre de particules tend vers l'infini) d'un modèle particulaire décrivant les interactions entre individus de populations animales, par exemple dans des bancs de poissons. A partir de ce modèle de type Fokker-Planck, on cherche alors à obtenir une limite lorsqu'on observe la population à grande échelle (limite macroscopique, ou hydrodynamique).

Je présente ici ces trois différentes échelles, ainsi que les calculs que j'ai effectués pour ajouter la prise en compte d'un angle de vision, et les calculs asymptotiques des coefficients que l'on obtient au final, lorsque le bruit est faible ou fort.

Remerciements

Je tiens ici à remercier Pierre Degond de m'avoir dirigé pendant mon stage de M2, de m'avoir permis de découvrir ce domaine de recherche, et de bien vouloir poursuivre avec moi ce sujet pour ma thèse. Malgré un fonctionnement « à distance », sa disponibilité et ses rapides réponses à mes courriers électroniques m'ont bien motivés pour avancer sur le sujet, même avec une préparation à l'agrégation en simultanée...

Table des matières

1	Introduction	3
2	Obtention du modèle cinétique	3
2.1	Le modèle particulaire	3
2.2	La limite de type champ moyen	4
3	La limite hydrodynamique	5
3.1	Changement d'échelle	5
3.2	Propriétés de Q	6
3.3	Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$	9
3.4	Hyperbolicité	13
4	Calcul asymptotique des coefficients	13
4.1	Développement de g	14
5	Conclusion	15

1 Introduction

L'algorithme de Couzin-Vicsek discret [3, 5] est un modèle particulière de formation d'essaim à partir d'interactions d'orientation. Il est utilisé pour modéliser le comportement de populations animales, par exemple des bancs de poissons. Les particules se déplacent à vitesse constante et, à chaque pas de temps, on réactualise leur orientation en fonction de la moyenne de celles des particules voisines, avec l'addition d'un bruit. Lorsque le bruit est faible, des simulations faites avec ce modèle font apparaître des phénomènes d'agrégation et d'alignement des particules.

Pour modéliser un banc de poisson qui pourrait atteindre un grand nombre d'individus, il peut être plus efficace de chercher des modèles continus, qui décrirait la population en termes de moyennes (densité, orientation moyenne) plutôt qu'individu par individu. Le but de l'article [2] est d'établir une limite de type champ moyen (lorsque le nombre de particules tend vers l'infini) d'un modèle particulière à temps continu analogue à l'algorithme de Couzin-Vicsek discret. On obtient alors un modèle cinétique de type Fokker-Planck et on cherche à en obtenir une limite lors d'une observation à grande échelle (limite macroscopique, ou hydrodynamique).

Je présente ici les modèles particulière et de type champ moyen dans la partie 2, ainsi que les calculs que j'ai effectués pour ajouter la prise en compte d'un angle de vision et obtenir la limite hydrodynamique dans la partie 3. Enfin, dans la partie 4, j'ai effectué les calculs asymptotiques des coefficients que l'on obtient pour cette limite hydrodynamique, lorsque le bruit est faible ou fort.

2 Obtention du modèle cinétique

Je présente ici les résultats initiaux obtenus dans [2], sur lesquels je me suis basé, avec une toute légère modification au niveau de l'opérateur « d'observation » K .

2.1 Le modèle particulière

C'est une version en temps continu [2] que l'on considère ici, obtenue à partir de l'algorithme de Cousin-Vicsek discret : dans la version discrète, on considère N particules ponctuelles dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3 , je prendrai la dimension 2 ici ar souci de simplicité) indexées par k , de positions X_k , qui se déplacent à une vitesse constante c . On donne donc seulement leurs orientations sur la sphère unité, $\omega_k \in \mathbb{S}_1$. A chaque intervalle de temps, les particules se déplacent selon leur direction et leur vitesse, puis changent leur orientation par la moyenne des orientations de leurs voisines (plus un certain bruit : Vicsek et al ont obtenu expérimentalement [5] qu'en deçà d'une valeur seuil du bruit, une dynamique cohérente apparait au bout d'un certain temps et les particules sont presque alignées).

La version en temps continu obtenue dans [2], sans le bruit, est le système d'EDO suivant :

$$\frac{dX_k}{dt} = c\omega_k, \tag{1}$$

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \nu (\text{Id} - \omega_k \otimes \omega_k)\bar{\omega}_k. \tag{2}$$

Ici, ν est la fréquence caractéristique de réaction pour la réorientation de la particule, qui est absente dans le modèle en temps discret, puisqu'on ne fait pas de différence entre le temps de réaction pour la réorientation et le pas de temps.

L'opérateur $\text{Id} - \omega_k \otimes \omega_k$ est l'opérateur de projection orthogonalement à ω_k , pour que l'équation permette de conserver ω_k sur la sphère unité : en prenant le produit scalaire de (2) par ω_k , on obtient bien que $\frac{d\omega_k}{dt} \cdot \frac{1}{2} |\omega_k|^2 = 0$.

Enfin $\bar{\omega}_k$ est l'orientation moyenne des particules autour de la particule k . On considèrera dans la suite le cas d'une observation non isotrope. On prendra donc une moyenne de la forme suivante

$$\bar{\omega}_k = \frac{J_k}{|J_k|}, \quad J_k = \sum_j K(X_j - X_k, \omega_k) \omega_j, \quad (3)$$

où K est le noyau d'observation, qui permet de donner plus de poids à certaines directions ou certaines distances. On le prendra ici dépendant seulement de la distance $|X_j - X_k|$ entre les particules et de $\frac{X_j - X_k}{|X_j - X_k|} \cdot \omega_k$, le cosinus de l'angle entre l'orientation de la particule et la direction de la droite joignant les deux particules. Par exemple, si on veut juste faire la moyenne uniforme sur les particules situées à une distance inférieure à R (comme dans le modèle original de l'algorithme de Couzin-Vicsek), on prendra pour K l'indicatrice de la boule de rayon R .

Lorsqu'on garde un bruit, on obtient cette fois ci pour le modèle particulaire, un système d'équations différentielles stochastiques :

$$\frac{dX_k}{dt} = c \omega_k, \quad (4)$$

$$d\omega_k = (\text{Id} - \omega_k \otimes \omega_k)(\nu \bar{\omega}_k dt + \sqrt{2D} dB_t), \quad (5)$$

où B_t est un mouvement brownien standard. C'est à partir de ce modèle que l'on cherche à obtenir une limite de champ moyen.

2.2 La limite de type champ moyen

Ici on redonne les résultats de [2], lorsque le nombre de particules N tend vers l'infini. Les résultats sont exactement les mêmes, on a seulement autorisé la forme du noyau à être un peu plus générale.

On obtient donc, formellement, comme limite du système stochastique pour les particules (4), (5), l'équation de Kolmogorov-Fokker-Planck suivante :

$$\partial_t f + c\omega \cdot \nabla_x f + \nabla_\omega \cdot (Ff) = D\Delta_\omega f, \quad (6)$$

$$F(x, \omega, t) = \nu (\text{Id} - \omega \otimes \omega) \bar{\omega}(x, \omega, t), \quad (7)$$

$$\bar{\omega}(x, \omega, t) = \frac{J(x, \omega, t)}{|J(x, \omega, t)|}, \quad J(x, \omega, t) = \int_{y \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{S}_1} K(|x - y|, \frac{y - x}{|x - y|} \cdot \omega) \nu f(y, v, t) dy dv. \quad (8)$$

On a donc simplement ajouté la dépendance en ω dans J par rapport au modèle de [2].

3 La limite hydrodynamique

3.1 Changement d'échelle

Après un changement d'échelle adéquat (on divise l'échelle spatiale par $\frac{c}{\nu}$ et on multiplie l'échelle temporelle par ν), on obtient une nouvelle écriture du système :

$$\partial_t f + \omega \cdot \nabla_x f + \nabla_\omega \cdot (Ff) = d\Delta_\omega f, \quad (9)$$

$$F(x, \omega, t) = (\text{Id} - \omega \otimes \omega) \bar{\omega}(x, \omega, t), \quad (10)$$

$$\bar{\omega}(x, \omega, t) = \frac{J(x, \omega, t)}{|J(x, \omega, t)|}, \quad J(x, \omega, t) = \int_{y \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{S}_1} K(|x - y|, \frac{y - x}{|x - y|} \cdot \omega) v f(y, v, t) dy dv, \quad (11)$$

qui dépend uniquement du paramètre sans dimension d et de la fonction K .

On s'intéresse à la dynamique du système à grande échelle spatio-temporelle. On divise les échelles par un paramètre ε , avec $\varepsilon \ll 1$. Le système s'écrit alors :

$$\varepsilon(\partial_t f^\varepsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\varepsilon) = -\nabla_\omega \cdot (F^\varepsilon f^\varepsilon) + d\Delta_\omega f^\varepsilon, \quad (12)$$

$$F^\varepsilon(x, \omega, t) = (\text{Id} - \omega \otimes \omega) \bar{\omega}^\varepsilon(x, \omega, t), \quad (13)$$

$$\bar{\omega}^\varepsilon(x, \omega, t) = \frac{J^\varepsilon(x, \omega, t)}{|J^\varepsilon(x, \omega, t)|}, \quad J^\varepsilon(x, \omega, t) = \int_{y \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{S}_1} K(|x - y| \frac{1}{\varepsilon}, \frac{y - x}{|x - y|} \cdot \omega) v f^\varepsilon(y, v, t) dy dv, \quad (14)$$

On s'intéresse à la limite (formelle) de ce problème quand ε tend vers 0.

On développe d'abord $\bar{\omega}^\varepsilon$ selon ε , dans le lemme suivant, qui nous permet d'avoir un terme d'ordre ε en plus, par rapport à [2] :

Lemme 1 *On a le développement suivant :*

$$\bar{\omega}^\varepsilon(x, \omega, t) = \Omega^\varepsilon(x, t) + \varepsilon \kappa (\omega \cdot \nabla_x) \Omega^\varepsilon(x, t) + O(\varepsilon^2), \quad (15)$$

où κ est une constante, dépendant du noyau, et où

$$\Omega^\varepsilon(x, t) = \frac{j^\varepsilon(x, t)}{|j^\varepsilon(x, t)|}, \quad \text{et} \quad j^\varepsilon(x, t) = \int_{v \in \mathbb{S}_1} v f^\varepsilon(x, v, t) dv, \quad (16)$$

Démonstration

Je renvoie à mon mémoire de M2 pour la démonstration. On obtient que $\kappa > 0$ correspond à une observation « vers l'avant ». \diamond

On peut donc ensuite reporter ceci dans le système (12) - (14), en faisant un développement de $F^\varepsilon(x, \omega, t)$, et on obtient

$$F^\varepsilon(x, \omega, t) = F_0^\varepsilon(x, \omega, t) + \varepsilon \kappa G_0^\varepsilon(x, \omega, t) + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

On désigne par $\nabla_x \Omega$ le « gradient » du vecteur Ω : $(\nabla_x \Omega)_{ij} = \partial_{x_i} \Omega_j$. On note T la transposée pour les opérateurs. On utilise enfin le symbole « : » pour désigner la « contraction » de deux opérateurs (si $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$ alors $A : B = \sum_{i,j=1,\dots,n} A_{ij} B_{ij}$, c'est la trace de AB^T). On obtient donc :

$$G_0^\varepsilon(x, \omega, t) = (\nabla_x \Omega^\varepsilon)^T \omega - (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega^\varepsilon) \omega \quad (18)$$

On introduit alors les opérateurs P et Q suivants :

$$Q(f) = -\nabla_\omega \cdot (F_{\Omega[f]} f) + d \Delta_\omega f, \quad (19)$$

$$P(f) = \nabla_\omega \cdot (G_{\Omega[f]} f), \quad (20)$$

$$F_\Omega(\omega) = (\text{Id} - \omega \otimes \omega) \Omega, \quad (21)$$

$$G_\Omega(\omega) = (\nabla_x \Omega)^T \omega - (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \omega, \quad (22)$$

$$\Omega[f] = \frac{j[f]}{|j[f]|}, \quad \text{et} \quad j[f] = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \omega f(\cdot, \omega) d\omega. \quad (23)$$

On obtient donc au final la proposition suivante :

Proposition 1

Le développement du modèle cinétique (6)-(8), à grande échelle spatio-temporelle, est donné par

$$\varepsilon(\partial_t f^\varepsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \kappa P(f^\varepsilon)) = Q(f^\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (24)$$

où les opérateurs P et Q sont donnés par les formules (19)-(23).

On note que l'opérateur P , contrairement à Q , n'agit pas uniquement sur la variable angulaire ω , il agit également sur la variable spatiale x .

On étudie alors les propriétés de l'opérateur Q , en tant qu'opérateur agissant sur les fonctions de ω , en analogie avec un modèle cinétique collisionnel classique.

3.2 Propriétés de Q

Dans l'article [2], c'est à ce niveau que le concept d'invariant collisionnel généralisé est introduit. Je reformule ici les résultats de l'article en dimension 2, pour plus de simplicité, mais en fait ce sont les mêmes qu'en dimension 3.

On commence par chercher les solutions d'équilibre, i.e. les fonctions f qui annulent l'opérateur Q . On définit

$$M_\Omega(\omega) = C \exp\left(\frac{\omega \cdot \Omega}{d}\right), \quad \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} M_\Omega(\omega) d\omega = 1. \quad (25)$$

La constante C est choisie pour normaliser M_Ω , elle dépend seulement de d , pas de Ω .

On a le lemme suivant :

Lemme 2 (i) On peut écrire l'opérateur Q de la façon suivante :

$$Q(f) = d \nabla_\omega \cdot \left[M_{\Omega[f]} \nabla_\omega \left(\frac{f}{M_{\Omega[f]}} \right) \right]. \quad (26)$$

De plus, on a

$$H(f) := \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} Q(f) \frac{f}{M_{\Omega[f]}} d\omega = -d \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} M_{\Omega[f]} \left| \nabla_{\omega} \left(\frac{f}{M_{\Omega[f]}} \right) \right|^2 d\omega \leq 0. \quad (27)$$

(ii) Les équilibres, i.e. les fonctions $f(\omega)$ telles que $Q(f) = 0$ forment une variété \mathcal{E} de dimension 2 donnée par

$$\mathcal{E} = \{ \rho M_{\Omega}(\omega) \mid \rho \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Omega \in \mathbb{S}_1 \}, \quad (28)$$

Le paramètre ρ est la masse totale et Ω est la direction du flux de $\rho M_{\Omega}(\omega)$:

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \rho M_{\Omega}(\omega) d\omega = \rho \quad (29)$$

$$\Omega = \frac{j[\rho M_{\Omega}]}{|j[\rho M_{\Omega}]|}, \quad j[\rho M_{\Omega}] = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \rho M_{\Omega}(\omega) \omega d\omega. \quad (30)$$

De plus, $H(f) = 0$ si et seulement si $f = \rho M_{\Omega}$ pour un certain $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et un certain $\Omega \in \mathbb{S}_1$.

Ici, Ω joue le même rôle que la vitesse moyenne pour la Maxwellienne classique, en dynamique des gaz, et le rôle de la température est joué par d .

On peut écrire le flux, après un calcul simple :

$$j[\rho M_{\Omega}] = \langle \cos \theta \rangle_M \rho \Omega, \quad (31)$$

où pour toute fonction g , le symbole $\langle g(\cos \theta) \rangle_M$ désigne la moyenne de g contre la densité M_{Ω} , i.e.

$$\langle g(\cos \theta) \rangle_M = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} M_{\Omega}(\omega) g(\omega \cdot \Omega) d\omega = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} g(\cos \theta) \exp\left(\frac{\cos \theta}{d}\right) d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{\cos \theta}{d}\right) d\theta} \quad (32)$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} g(\cos \theta) \exp\left(\frac{\cos \theta}{d}\right) d\theta}{\int_0^{\pi} \exp\left(\frac{\cos \theta}{d}\right) d\theta}, \quad (33)$$

la dernière égalité découlant de la parité.

On note que $\langle g(\cos \theta) \rangle_M$ dépend seulement de d et pas de Ω .

On veut déterminer maintenant les invariants collisionnels de Q , i.e. les fonctions $\psi(\omega)$ (suffisamment régulières) telles que

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} Q(f) \psi d\omega = 0, \quad \forall f. \quad (34)$$

D'après (26), ceci peut être reformulé comme ceci

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \frac{f}{M_{\Omega[f]}} \nabla_{\omega} \cdot (M_{\Omega[f]} \nabla_{\omega} \psi) d\omega = 0, \quad \forall f. \quad (35)$$

Les constantes sont évidemment des invariants collisionnels. Comme il n'y a pas de conservation du moment, il n'y a pas d'autre relation de conservation évidente. On a donc des invariants collisionnels dans un espace vectoriel de dimension 1, alors que la variété des

équilibrés est de dimension 2. C'est ici que l'on introduit les invariants de collisionnels généralisés, afin de ne pas manquer d'équations pour Ω à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

On change légèrement le point de vue, en fixant $\Omega \in \mathbb{S}_1$ arbitrairement. On affaiblit (35) en demandant qu'elle soit valable seulement pour tout f dont le flux est aligné avec Ω , i.e. $\Omega[f] \times \Omega = 0$, ou encore :

$$0 = \Omega \times j[f] = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} f(\Omega \times \omega) d\omega. \quad (36)$$

Donc pour Ω fixé, on veut trouver tous les ψ tels que

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \frac{f}{M_\Omega} \nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) d\omega = 0, \quad \forall f \text{ tels que } \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} f(\Omega \times \omega) d\omega = 0. \quad (37)$$

On peut voir ceci comme une contrainte linéaire, et trouver les invariants de collision généralisés revient au problème qui suit. Etant donné $\Omega \in \mathbb{S}_1$, trouver tous les ψ tels qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$, et qu'on ait, en désignant par \times le déterminant de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 :

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \frac{f}{M_\Omega} \{ \nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) - \beta(\Omega \times \omega) M_\Omega \} d\omega = 0, \quad \forall f. \quad (38)$$

Ceci étant valable pour tout f , on tombe immédiatement sur le problème suivant pour déterminer ψ :

$$\nabla_\omega \cdot (M_\Omega \nabla_\omega \psi) = \beta \Omega \times \omega M_\Omega. \quad (39)$$

C'est un problème linéaire, et l'ensemble \mathcal{C}_Ω des invariants collisionnels généralisés associés à Ω est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par $\{1, \psi\}$, avec une expression explicite pour ψ que l'on peut obtenir juste en intégrant (on pose $\cos \theta = \Omega \cdot \omega$).

En effet, les constantes étant écartées, on cherche les solutions de (39) qui sont de moyenne nulle. La fonction ψ est l'unique solution 2π -périodique et de moyenne nulle (solution dans l'espace $\overset{\circ}{H}^1(\mathbb{S}_1)$) obtenue en appliquant le théorème de Lax-Milgram, par exemple) de

$$\partial_\theta(M(\cos \theta) \partial_\theta \psi) = \sin \theta M(\cos \theta). \quad (40)$$

Alors, en décomposant ψ suivant sa partie paire et impaire, on obtient que ψ est impaire. D'où $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. On peut alors voir ψ comme l'unique solution de l'équation elliptique (40) sur $[0, \pi]$ avec condition homogène de Dirichlet. On peut de plus obtenir une expression exacte pour ψ en posant

$$\psi_0(\theta) = - \int_0^\theta \left(\int_\beta^\pi \sin \alpha \exp\left(\frac{\cos \alpha}{d}\right) d\alpha \right) \exp\left(-\frac{\cos \beta}{d}\right) d\beta \text{ et} \quad (41)$$

$$\psi_\infty(\theta) = \int_0^\theta \exp\left(-\frac{\cos \beta}{d}\right) d\beta, \quad (42)$$

On a alors :

$$\psi(\theta) = \psi_0(\theta) - \frac{\psi_0(\pi)}{\psi_\infty(\pi)} \psi_\infty(\theta). \quad (43)$$

On définit alors la fonction g comme $g(\cos \theta) = \psi(\theta)$ pour $\theta \in [0, \pi]$, et on définit la fonction h comme $h(\mu) = \frac{g(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}}$, de sorte que l'on peut écrire

$$\psi(\omega) = (\Omega \times \omega) h(\Omega \cdot \omega) \quad (44)$$

. Ces calculs explicites permettront par la suite de pouvoir obtenir des développements asymptotiques des coefficients obtenus dans la limite hydrodynamique.

3.3 Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$

La méthode pour obtenir la limite formelle du modèle est la suivante. On suppose alors que $f \rightarrow f^\varepsilon$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors $Q(f) = 0$, et par le lemme 2, $f = \rho M_\Omega$, avec $\rho \geq 0$ et $\Omega \in \mathbb{S}$. On intègre l'équation cinétique du modèle de champ moyen « rescalé » (24) contre un invariant collisionnel (généralisé ou pas), ce qui fait disparaître le terme d'ordre 0 en ε , et on suppose que toutes les convergences ont lieu sans problème, et que tout est assez régulier. Le but est d'obtenir des équations sur ρ et sur Ω .

La multiplication par l'invariant constant et l'intégration sur \mathbb{S} nous donne la conservation de la masse

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot j^\varepsilon = 0, \quad (45)$$

On obtient à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho \Omega) = 0, \quad (46)$$

puisque, d'après (31), $j = c_1 \rho \Omega$ avec $c_1 = \langle \cos \theta \rangle_M$.

C'est pour obtenir l'équation sur Ω que l'on a besoin des invariants généralisés. On multiplie (24) par $\vec{\psi}^\varepsilon = h(\omega \cdot \Omega[f^\varepsilon]) (\Omega[f^\varepsilon] \times \omega)$ (l'invariant généralisé associé à $\Omega[f^\varepsilon]$), et on intègre par rapport à ω sur \mathbb{S}_1 . Ceci fait disparaître le terme en $Q(f^\varepsilon)$, puisque le flux de f^ε est dirigé suivant $\Omega[f^\varepsilon]$.

On obtient donc, en divisant par ε ,

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} (\partial_t f^\varepsilon + \omega \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \kappa P(f^\varepsilon) + O(\varepsilon)) h(\omega \cdot \Omega[f^\varepsilon]) \Omega[f^\varepsilon] \times \omega d\omega. \quad (47)$$

Sous toutes nos hypothèses de régularité, à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient donc

$$\Omega \times X = 0, \quad X := \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} (\partial_t(\rho M_\Omega) + \omega \cdot \nabla_x(\rho M_\Omega) + \kappa P(\rho M_\Omega)) h(\omega \cdot \Omega) \omega d\omega, \quad (48)$$

ce qui revient à dire que $(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) X = 0$.

Il faut donc rajouter dans le calcul les termes provenant du terme en P , par rapport à l'article [2] où on obtenait, en distribuant les dérivations :

$$\partial_t(\rho M_\Omega) + \omega \cdot \nabla_x(\rho M_\Omega) = M_\Omega [\partial_t \rho + \omega \cdot \nabla_x \rho + d^{-1} \rho (\omega \cdot \partial_t \Omega + (\omega \otimes \omega) : \nabla_x \Omega)]. \quad (49)$$

On écrit d'abord $P(\rho M_\Omega)$ sous la forme $\rho \nabla_\omega \cdot A_\Omega(\omega)$, avec

$$A_\Omega(\omega) = M_\Omega G_\Omega(\omega) \quad (50)$$

$$= M_\Omega((\nabla_x \Omega)^T \omega - (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \omega), \quad (51)$$

où on a posé $\cos \theta = \Omega \cdot \omega$, et où la fonction M_Ω ne dépend que de $\cos \theta$.

On a, après intégration par parties,

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \nabla_\omega \cdot A_\Omega(\omega) h(\omega \cdot \Omega) \omega d\omega = - \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} (h A_\Omega(\omega) + A_\Omega(\omega) \cdot \Omega \dot{h}(\omega \cdot \Omega) \omega) d\omega \quad (52)$$

$$= - \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} B_\Omega(\omega) d\omega, \quad (53)$$

avec, en développant

$$B_\Omega(\omega) = M_\Omega h (\nabla_x \Omega)^T \omega + M_\Omega \dot{h} (((\nabla_x \Omega)^T \omega) \cdot \Omega) \omega - M_\Omega h (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \omega - M_\Omega \dot{h} \cos \theta (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \omega \quad (54)$$

$$= M_\Omega \dot{h} ((\nabla_x \Omega)^T \omega + \eta (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \omega), \quad (55)$$

où la fonction $\eta = -1 - \frac{\dot{h}}{h} \cos \theta$ ne dépend que de $\cos \theta$, et où on a éliminé le deuxième terme puisque Ω est un vecteur unitaire et que $((\nabla_x \Omega)^T \omega) \cdot \Omega = \omega \cdot (\nabla_x \Omega \Omega) = \omega \cdot (\frac{1}{2} \nabla_x |\Omega|^2)$.

En utilisant (53), (49), et (44), on obtient donc en regroupant les termes :

$$X = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} [\partial_t \rho + \omega \cdot (\nabla_x \rho + d^{-1} \rho \partial_t \Omega) + \rho (d^{-1} - \kappa \eta) (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega)] \omega h M_\Omega d\omega - \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \kappa \rho (\nabla_x \Omega)^T \omega h M_\Omega d\omega. \quad (56)$$

On désigne par X_1, X_2, X_3, X_4 les quatre termes obtenus.

On va les calculer en écrivant ω en coordonnées polaires, dans une base (e_1, Ω) , ce qui nous donne $\omega = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

On peut déjà traiter le premier et le dernier terme facilement.

En effet, $X_1 = \partial_t \rho \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} h M_\Omega \omega d\omega = \partial_t \rho \langle \cos \theta h \rangle_M \Omega$ est orienté selon Ω et donc

$$(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) X_1 = 0. \quad (57)$$

Ensuite, $X_4 = -\kappa \rho (\nabla_x \Omega)^T \Omega \langle \cos \theta h \rangle_M$, est un terme orthogonal à Ω (on peut réécrire $(\nabla_x \Omega)^T \Omega$ comme $(\Omega \cdot \nabla_x) \Omega$, et Ω est unitaire). On obtient donc

$$(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) X_4 = X_4 = -\kappa \rho \langle \cos \theta h \rangle_M (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega. \quad (58)$$

Pour les deux autres termes, le résultat va un peu plus calculatoire.

Pour X_2 , on a simplement besoin de calculer $I_2(\gamma) = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \omega \otimes \omega \gamma M_\Omega d\omega$ pour une fonction de $\cos \theta$ arbitraire γ , puisqu'alors $X_2 = I_2(h) \nabla_x \rho + d^{-1} \rho I_2(h) \partial_t \Omega$.

Après calculs, on a

$$\int_{\omega \in \mathbb{S}_1} \omega \otimes \omega \gamma M_\Omega d\omega = \langle \sin^2 \theta \gamma \rangle_M (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) + \langle \cos^2 \theta \gamma \rangle_M \Omega \otimes \Omega. \quad (59)$$

En prenant la composante orthogonale à Ω , on ne garde que le premier terme à chaque fois. En utilisant le fait que $\partial_t \Omega$ est orthogonal à Ω , on obtient donc au final :

$$(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) X_2 = \langle \sin^2 \theta h \rangle_M (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \nabla_x \rho + d^{-1} \rho \langle \sin^2 \theta h \rangle_M \partial_t \Omega, \quad (60)$$

Il nous reste à calculer le terme en X_3 . C'est le même type de calcul, mais il est un peu plus compliqué.

$$\begin{aligned} \int_{\omega \in \mathbb{S}^1} \omega \otimes \omega \otimes \omega \gamma M_\Omega d\omega &= \langle \sin^2 \theta \cos \theta \gamma \rangle_M ((\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \otimes \Omega + \Omega \otimes (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) + \\ &\quad + [(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \otimes \Omega \otimes (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega)]_{:24}) \\ &\quad + \langle \cos^3 \theta \gamma \rangle_M \Omega \otimes \Omega \otimes \Omega, \end{aligned} \quad (61)$$

Ici, « : 24 » désigne la contraction des indices 2 et 4, ce qui signifie simplement que, si l'on est dans une base orthonormée (e_1, Ω) , $\left(\int_{\omega \in \mathbb{S}^1} \omega \otimes \omega \otimes \omega \gamma M_\Omega d\omega \right)_{ijk}$ vaut $\langle \sin^2 \theta \cos \theta \gamma \rangle_M$ si le triplet (i, j, k) vaut $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, ou $(2, 1, 1)$, qu'il vaut $\langle \cos^3 \theta \gamma \rangle_M$, si le triplet (i, j, k) vaut $(2, 2, 2)$ et qu'il est nul dans les autres cas (pour des raisons de parité, les intégrales sur la sphère ne peuvent être non nulles que si le terme « $\sin \theta$ » apparaît un nombre pair de fois).

On veut calculer en fait $\int_{\omega \in \mathbb{S}^1} (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \gamma \omega M_\Omega d\omega$, ce qui peut s'écrire de la manière suivante (on utilise la convention de sommation d'Einstein) :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\omega \in \mathbb{S}^1} \omega \otimes \omega \otimes \omega \gamma M_\Omega d\omega \right) : \nabla_x \Omega &= \left(\int_{\omega \in \mathbb{S}^1} \omega \otimes \omega \otimes \omega \gamma M_\Omega d\omega \right)_{ijk} \partial_{x_j} \Omega_k = \\ &= \langle \sin^2 \theta \cos \theta \gamma \rangle_M ((\text{Id} - \Omega \otimes \Omega)_{ij} \Omega_k \partial_{x_j} \Omega_k + \Omega_i (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega)_{jk} \partial_{x_j} \Omega_k + \\ &\quad + (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega)_{ik} \Omega_j \partial_{x_j} \Omega_k) \\ &\quad + \langle \cos^3 \theta \gamma \rangle_M \Omega_i \Omega_j \Omega_k \partial_{x_j} \Omega_k. \end{aligned} \quad (62)$$

Comme Ω est unitaire, $\Omega_k \partial_{x_j} \Omega_k = \frac{1}{2} \partial_{x_j} (|\Omega|^2) = 0$, ce qui annule le premier et le dernier terme de la somme. On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\omega \in \mathbb{S}^1} (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \gamma \omega M_\Omega d\omega &= \langle \sin^2 \theta \cos \theta \gamma \rangle_M ((\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) : (\nabla_x \Omega)) \Omega + \\ &\quad + \langle \sin^2 \theta \cos \theta \gamma \rangle_M (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) ((\Omega \cdot \nabla_x) \Omega). \end{aligned} \quad (63)$$

Le premier terme est parallèle à Ω , et $(\Omega \cdot \nabla_x) \Omega$ est orthogonal à Ω (encore une fois parce qu'il est unitaire). On simplifie de nouveau lorsqu'on applique $\text{Id} - \Omega \otimes \Omega$:

$$(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \left(\int_{\omega \in \mathbb{S}^1} (\omega \otimes \omega : \nabla_x \Omega) \gamma \omega M_\Omega d\omega \right) = \langle \sin^2 \theta \cos \theta \gamma \rangle_M (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega. \quad (64)$$

On obtient donc le dernier terme :

$$(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) X_3 = \rho \langle \sin^2 \theta \cos \theta (d^{-1} - \kappa \eta) h \rangle_M (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega. \quad (65)$$

On peut alors tout regrouper, et écrire que $(\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) X = 0$ équivaut à

$$\begin{aligned} &\langle \sin^2 \theta h \rangle_M (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \nabla_x \rho + d^{-1} \rho \langle \sin^2 \theta h \rangle_M \partial_t \Omega \\ &+ \langle \sin^2 \theta \cos \theta (d^{-1} - \kappa \eta) h \rangle_M (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega - \kappa \rho \langle \cos \theta h \rangle_M (\Omega \cdot \nabla_x) \Omega = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

En divisant par $\langle \sin^2 \theta h \rangle_M$, on se retrouve dans le même cas que dans [2], seule la constante c_2 est changée. En récupérant l'équation de conservation de la masse (46), et cette équation sur Ω , on obtient donc le modèle macroscopique final de l'algorithme de Couzin-Vicsek :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho \Omega) = 0. \quad (67)$$

$$\rho (\partial_t \Omega + c_2 (\Omega \cdot \nabla) \Omega) + d (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \nabla_x \rho = 0, \quad (68)$$

où, en reprenant la définition $\eta = -1 - \frac{\dot{h}}{h} \cos \theta$, en utilisant la notation $\langle g \rangle_{\gamma M} = \frac{\langle g \gamma \rangle_M}{\langle \gamma \rangle_M}$, et en faisant le plus de simplifications possibles, (notamment en intégrant par parties) on a :

$$c_1 = \langle \cos \theta \rangle_M. \quad (69)$$

$$c_2 = \langle \cos \theta (1 - \kappa \cos \theta - 2\kappa d) \rangle_{\sin \theta g M}. \quad (70)$$

En résumé on a retrouvé le théorème principal de [2], même dans le cas d'un noyau d'observation non-isotrope :

Théorème 1

La limite de f^ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ est donnée (formellement) par $f^0 = \rho M_\Omega$, où $\rho = \rho(x, t) \geq 0$ est la masse totale de f^0 et $\Omega = \Omega(x, t) \in \mathbb{S}_1$ est le vecteur directeur unitaire de son flux :

$$\rho(x, t) = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} f^0(x, \omega, t) d\omega, \quad (71)$$

$$\Omega = \frac{j}{|j|}, \quad j(x, t) = \int_{\omega \in \mathbb{S}_1} f^0(x, \omega, t) \omega d\omega. \quad (72)$$

La fonction M_Ω , donnée comme fonction de $\omega \cdot \Omega$ est définie uniquement à partir de d :

$$M_\Omega(\omega) = C \exp\left(\frac{\omega \cdot \Omega}{d}\right), \quad (73)$$

où la constante C est choisie pour normaliser M_Ω : $\int_{\mathbb{S}_1} M_\Omega(\omega) d\omega = 1$ (elle dépend donc seulement de d , pas de Ω).

De plus, $\rho(x, t)$ et $\Omega(x, t)$ satisfont le système d'EDP du premier ordre suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c_1 \rho \Omega) = 0. \quad (74)$$

$$\rho (\partial_t \Omega + c_2 (\Omega \cdot \nabla) \Omega) + d (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \nabla_x \rho = 0, \quad (75)$$

où les vitesses de convection c_1 et c_2 sont donnés par (69) et (70).

Au niveau de l'interprétation, le coefficient c_2 représente la vitesse à laquelle se propage l'information sur les perturbations (de l'orientation) du système. Et le « fluide » obtenu, lui, se déplace à la vitesse $c_1 < 1$ suivant Ω (ceci est normal : il se déplace plus lentement que les particules initiales, qui allaient à la vitesse 1, du fait de la diffusion, et on verra par la suite que lorsque la diffusion est faible, c_1 est en effet proche de 1).

Le but est d'observer comment se comporte c_2 par rapport à c_1 , en fonction de la diffusion d et du paramètre d'observation κ .

3.4 Hyperbolicité

On fait un dernier changement d'échelle (qui revient à dire que les particules se déplacent à la vitesse $\frac{1}{c_1}$ et le fluide à la vitesse 1), et en posant $c = \frac{c_2}{c_1}$ et $\lambda = \frac{d}{c_1}$, on se ramène au système suivant :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \Omega) = 0. \quad (76)$$

$$\rho (\partial_t \Omega + c(\Omega \cdot \nabla) \Omega) + \lambda (\text{Id} - \Omega \otimes \Omega) \nabla_x \rho = 0, \quad (77)$$

Pour montrer que ce système est hyperbolique, on se place dans une base orthonormale arbitraire (e_1, e_2) , on pose $\Omega = (\cos \theta, \sin \theta)$, et on cherche les solutions qui ne dépendent pas de la deuxième variable. On tombe sur le système suivant :

$$\partial_t \rho + \cos \theta \partial_x \rho - \rho \sin \theta \partial_x \theta = 0. \quad (78)$$

$$\partial_t \theta + c \cos \theta \partial_x \theta - \lambda \sin \theta \partial_x \ln \rho = 0.. \quad (79)$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \partial_t \rho \\ \partial_t \theta \end{pmatrix} + A(\rho, \theta) \begin{pmatrix} \partial_x \rho \\ \partial_x \theta \end{pmatrix} = 0, \quad (80)$$

avec

$$A(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ -\frac{\lambda \sin \theta}{\rho} & c \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (81)$$

Dire que le système (76),(77) est hyperbolique équivaut à dire que cette matrice $A(\rho, \theta)$ est diagonalisable, ce qui est vrai : ses deux valeurs propres γ_{\pm} sont données par

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(c+1) \cos \theta \pm \left((c-1)^2 \cos^2 \theta + 4\lambda \sin^2 \theta \right)^{1/2} \right], \quad (82)$$

qui sont distinctes, sauf éventuellement dans le cas où $\sin \theta = 0$, auquel cas A est déjà diagonale.

On a donc bien affaire à un système hyperbolique.

4 Calcul asymptotique des coefficients

On cherche à calculer les coefficients $c = \frac{c_2}{c_1}$ et $\lambda = \frac{d}{c_1}$ lorsque d est très petit ou très grand devant 1.

4.1 Développement de g

Je renvoie à mon mémoire de M2 pour des calculs détaillés (et un peu indigestes). Pour le cas $d \rightarrow 0$, il faut d'abord développer g . Pour le cas $d \rightarrow \infty$ on peut obtenir les développements beaucoup plus facilement, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle. Au final on obtient la proposition suivante :

Proposition 2

La limite hydrodynamique (formelle, après le dernier changement d'échelle) du modèle cinétique vérifie les équations :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \Omega) = 0, \quad (83)$$

$$\rho (\partial_t \Omega + c(\Omega \cdot \nabla) \Omega) + \lambda (Id - \Omega \otimes \Omega) \nabla_x \rho = 0. \quad (84)$$

Et on a les développements suivants :

$$- \text{quand } d \rightarrow 0 \quad \begin{cases} c = 1 - \kappa + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right) d + O(d^2), \\ \lambda = d + \frac{d^2}{2} + O(d^2) \end{cases} . \quad (85)$$

$$- \text{quand } d \rightarrow \infty \quad \begin{cases} c = -\frac{5}{4}\kappa d + \frac{3}{8} + O\left(\frac{1}{d}\right), \\ \lambda = 2d^2 + O(1) \end{cases} . \quad (86)$$

Lorsque la diffusion est faible, la conclusion (biologiquement pertinente) est que plus les particules « regardent vers l'avant » (autrement dit, plus κ est grand), plus l'information sur les perturbations du système se propage rapidement « vers l'arrière » (c'est à dire que c est plus petit que 1, qui est la vitesse du « fluide »).

J'ai calculé numériquement les différents coefficients, pour m'assurer de la validité de mes calculs, je donne ici un graphique.

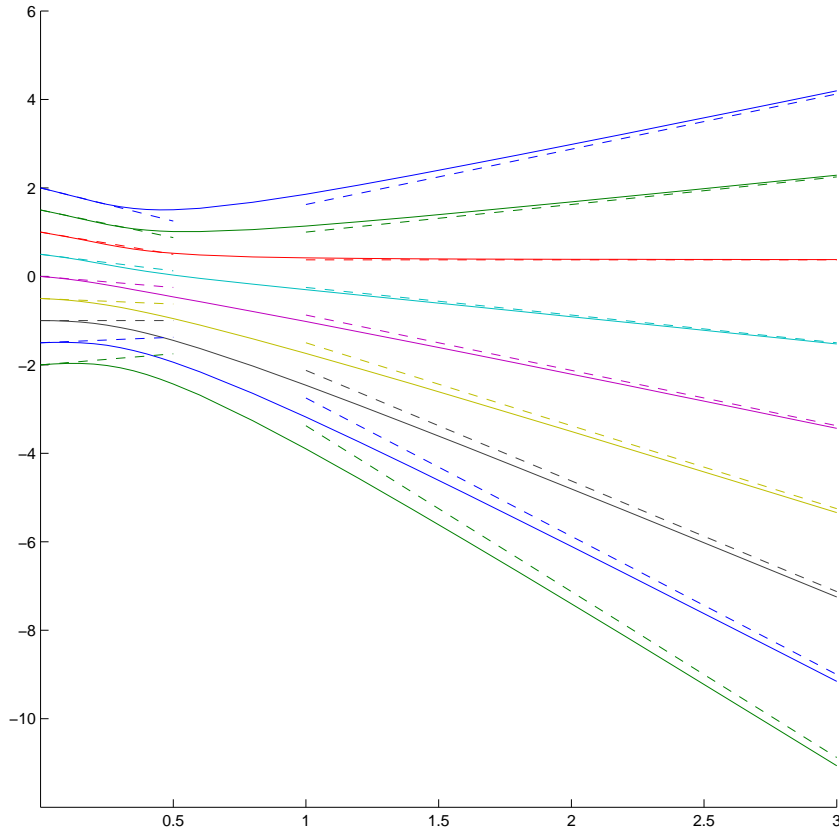


FIG. 1 – Calcul numérique du coefficient c en fonction de d , pour des valeurs de κ allant de -1 à 3 . Les droites en pointillés correspondent aux développements en 0 et en $+\infty$ obtenus précédemment.

5 Conclusion

On a pu obtenir le même théorème que dans [2]. En particulier, on a obtenu un modèle au premier ordre qui est toujours hyperbolique. C'est donc un modèle qui ne donne pas a priori de phénomène de transition de phase, comme on peut en obtenir lorsque le système « traverse des zones d'ellipticité », où lorsqu'on a affaire à un équilibre qui n'est plus unique.

On ne peut donc pas retrouver avec le modèle continu les phénomènes d'agrégation observés avec l'algorithme discret, dans le cas d'un bruit faible.

On a quand même pu, à l'aide de développements limités, à faible bruit, quantifier la manière dont le paramètre d'observation « vers l'avant » influe sur la propagation de l'information sur le système (en particulier sur les perturbations d'orientation).

Références

- [1] F. Cucker et S. Smale, *Emergent Behavior in Flocks*, IEEE Transactions on Automatic Control, 52 (2007), pp. 852–862.
- [2] P. Degond et S. Motsch, *Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction*, M3AS 18 (2008), pp. 321–366
- [3] G. Grégoire et H. Chaté, *Onset of collective and cohesive motion*, Phys. Rev. Lett., 92 (2004) 025702.
- [4] S.-Y. Ha et J.-G. Liu, *A simple proof of the Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit*, preprint.
- [5] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen and O. Shochet, *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles*, Phys. Rev. Lett., 75 (1995), pp. 1226–1229.