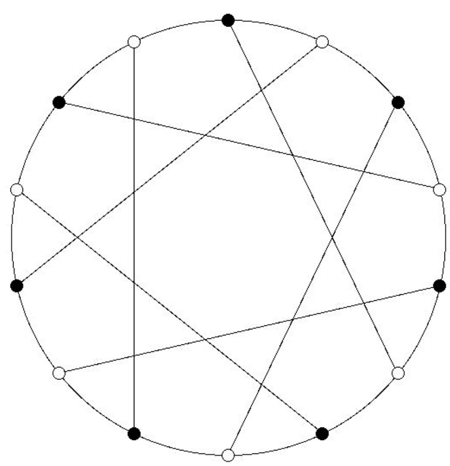
École normale supérieure
Département de mathématiques et applications
Mémoire de maîtrise

La propriété (T) de Kazhdan et les immeubles triangulaires

Nicolas GARREL
Maxime GHEYSENS



Sous la direction de Frédéric PAULIN

21 juin 2011
Version corrigée du 20 janvier 2012

Introduction

τοὺς γὰρ τοιούτους πρῶτον μὲν ἑαυτῶν
τε καὶ ἀλλήλων οἴει ἄν τι ἑωρακέναι ἄλλο
πλὴν τὰς σκιὰς τὰς ὑπὸ τοῦ πυρὸς εἰς τὸ
καταντικρὺ αὑτῶν τοῦ σπηλαίου
προσπιπτούσας ;[1]

Platon, *La République*, VII

Tels les hommes de la caverne de Platon, les mathématiciens étudient souvent les groupes au travers de leurs représentations, qui en révèlent de façon indirecte des propriétés intrinsèques. Ainsi, les groupes topologiques se dévoilent notamment par l'intermédiaire de leurs actions unitaires sur des espaces de Hilbert. En 1967, David Kazhdan introduisit une propriété de rigidité pour ce genre d'actions, appelée *propriété (T) de Kazdhan*, qui s'est avérée particulièrement fructueuse dans des domaines aussi divers que la théorie des groupes de Lie, la théorie ergodique, les marches aléatoires, les algèbres d'opérateurs, la combinatoire et l'informatique théorique.

Nous commencerons par donner différentes définitions de la propriété (T) et quelques-unes de ses conséquences. Ensuite, nous démontrerons un critère combinatoire permettant d'établir la propriété (T) sans avoir à étudier les représentations de groupes. Enfin, nous donnerons des applications de ce critère pour des groupes agissant sur des complexes simpliciaux d'un type particulier, appelés *immeubles triangulaires*.

Nous tenons à exprimer nos plus vifs remerciements à Frédéric Paulin de nous avoir proposé ce sujet vaste et captivant. Son encadrement constant et exigeant ainsi que sa disponibilité furent une chance que nous n'ignorons pas. Nous lui savons gré également de ses relectures minutieuses — tout en portant bien entendu l'entière responsabilité des erreurs qui resteraient dans le présent texte.

Nous nous remercions aussi mutuellement pour notre complémentarité.

1. « Crois-tu d'abord que de tels hommes auraient pu voir quoi que ce soit d'autre, d'eux-mêmes et de leurs voisins, que les ombres qui, sous l'effet du feu, se projettent sur la paroi de la caverne qui leur fait face ? »

1 Propriété (T) de Kazhdan

1.1 Premières définitions

Il existe de nombreuses définitions différentes pour la propriété (T), qui s'avèrent être équivalentes dans la plupart des cas (par exemple pour les groupes localement compacts et σ-compacts, ce que seront tous les groupes topologiques que nous considérerons dans ce travail). Nous donnons dans cette partie deux définitions, l'une en terme d'actions unitaires sur des espaces de Hilbert, l'autre en terme d'actions isométriques affines sur des espaces de Hilbert. Dans un premier temps, nous utiliserons des noms différents pour ces deux définitions, nous verrons plus loin qu'elles sont équivalentes pour les groupes localement compacts et σ-compacts. Une troisième définition, en termes cohomologiques, moins intuitive mais plus pratique pour la démonstration du critère spectral de Żuk, sera donnée plus loin. Les conséquences de la propriété (T) seront démontrées avec l'une ou l'autre de ces définitions. L'essentiel de cette partie est inspiré de [BdlHV08], auquel nous renverrons pour certaines démonstrations.

Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront complexes. Dans toute cette partie, G désignera un groupe topologique et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, dont le produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est linéaire en la première variable et antilinéaire en la seconde. Nous noterons $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des opérateurs unitaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

1.1.1 Définition en termes d'actions unitaires — propriété (T)

Soient G un groupe topologique et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. Une *représentation unitaire* de G dans $\mathcal{H}$ est un morphisme de groupes $\pi : \mathrm{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ *fortement continu*, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, l'application de G dans $\mathcal{H}$ définie par

$$g \mapsto \pi(g)\xi$$

est continue. Nous noterons $(\pi, \mathcal{H})$ une telle représentaiton unitaire.

Soient Q une partie de G et $\varepsilon > 0$. Un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est dit $(\mathrm{Q}, \varepsilon)$-invariant si

$$\sup_{x \in \mathrm{Q}} \| \pi(x)\xi - \xi \| < \varepsilon \| \xi \|.$$

Une représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ *a presque des vecteurs invariants* si pour tout compact Q de G et tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur $(\mathrm{Q}, \varepsilon)$-invariant. Cette représentation *a des vecteurs invariants* s'il existe $\xi \in \mathcal{H}$ non nul tel que $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

Un groupe topologique G a la *propriété (T)* ou est un *groupe de Kazhdan* s'il existe un compact Q dans G et $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : toute représentation unitaire de G ayant un vecteur $(\mathrm{Q}, \varepsilon)$-invariant a des vecteurs invariants. En ce cas, la paire $(\mathrm{Q}, \varepsilon)$ est appelée une *paire de Kazhdan*.

Remarque. — Si ξ est un vecteur $(\mathrm{Q}, \frac{\varepsilon}{n})$-invariant, alors il est également $(\mathrm{Q}^n, \varepsilon)$-invariant, où Q^n désigne l'ensemble des produits de n éléments dans Q (ceci découle immédiatement de l'inégalité triangulaire et du fait que la représentation est unitaire). En particulier, si G est un groupe localement compact et engendré par un compact K, alors $(\pi, \mathcal{H})$ a presque des vecteurs invariants si et seulement si elle a des vecteurs $(\mathrm{K}, \varepsilon)$-invariants pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, pour ces groupes, avoir la propriété (T) équivaut à la propriété suivante : toute représentation unitaire ayant presque des vecteurs invariants a des vecteurs invariants. Cette observation sera utile par la suite, car nous montrerons que tout groupe localement compact et σ-compact de Kazhdan est engendré par un compact.

1.1.2 Définition en termes d'actions isométriques affines — propriété (FH)

Une autre propriété, qui se révèle équivalente à la propriété (T) pour les groupes localement compacts et σ-compacts, est la propriété (FH), qui se définit en terme d'actions isométriques affines.

Soient G un groupe topologique et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Une *action isométrique affine*[1] de G sur $\mathcal{H}$ est la donnée d'un morphisme fortement continu de G dans le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$. Un tel morphisme α est caractérisé par sa partie linéaire $\pi = \pi_\alpha$, qui est un morphisme fortement continu de G dans $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, et sa partie translation $b = b_\alpha$, qui est une application continue de G dans $\mathcal{H}$. Pour tous $g \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathcal{H}$, on a $\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g)$. Inversement, deux telles applications définissent bien une action affine. Ces notations seront implicites dans toute la suite quand on étudiera des actions isométriques affines.

On dit que G a la *propriété (FH)* si toute action isométrique affine de G possède un point fixe. Notons qu'ici on n'a pas besoin de le supposer non nul comme dans le cas des actions unitaires puisque une action affine ne privilégie aucun point.

1.2 Exemples

1.2.1 Groupes compacts

Il est immédiat, d'après les définitions, que tout groupe fini a la propriété (T). Ceci se généralise facilement aux groupes compacts.

1. Quoiqu'il existe bien sûr des actions affines non isométriques, nous n'en considérerons pas dans ce travail. Ainsi, toutes les actions affines seront supposées isométriques même lorsque ce n'est pas explicitement indiqué.

Proposition 1.1 (Kazhdan, 1967). — *Tout groupe compact est un groupe de Kazhdan.*

Nous donnons deux démonstrations de ce résultat.

Démonstration (via les actions unitaires). — Nous allons montrer de façon plus générale que $(\mathrm{G}, \sqrt{2})$ est une paire de Kazhdan, c'est-à-dire que s'il existe un vecteur $(\mathrm{G}, \sqrt{2})$-invariant, alors il existe un vecteur invariant. Ainsi, si G est compact, il aura la propriété (T).

Soient ξ un vecteur unitaire $(\mathrm{G}, \sqrt{2})$-invariant et $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\pi(\mathrm{G})\xi = \{\pi(g)\xi | g \in \mathrm{G}\}$. Comme $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, il existe un unique $\eta_0 \in \mathcal{C}$ minimisant la norme sur $\mathcal{C}$ (autrement dit, η_0 est la projection de 0 sur $\mathcal{C}$). Par unicité, η_0 est un vecteur invariant (puisque $\mathcal{C}$ et 0 sont invariants). Il nous suffit donc de montrer qu'il est non nul.

Posons
$$\delta = \sqrt{2} - \sup_{g \in \mathrm{G}} \| \pi(g)\xi - \xi \|,$$
nous avons $\delta > 0$ par hypothèse. Comme ξ est unitaire, nous avons, pour tout $g \in \mathrm{G}$,
$$2 - 2\,\mathrm{Re}\langle \pi(g)\xi, \xi \rangle = \| \pi(g)\xi - \xi \|^2 \leqslant (\sqrt{2} - \delta)^2,$$
et donc
$$\mathrm{Re}\langle \pi(g)\xi, \xi \rangle \geqslant \frac{\delta(2\sqrt{2} - \delta)}{2}.$$

Par linéarité du produit scalaire et continuité de l'application $g \mapsto \pi(g)\xi$, nous en déduisons donc
$$\mathrm{Re}\langle \eta, \xi \rangle \geqslant \frac{\delta(2\sqrt{2} - \delta)}{2} > 0$$
pour tout $\eta \in \mathcal{C}$: en particulier, η_0 est non nul. ■

Démonstration (via les actions isométriques affines). — Montrons le lemme suivant, intéressant en lui-même car il permet d'alléger considérablement la condition pour vérifier la propriété (FH).

Lemme 1.2. — *Soient* G *un groupe topologique et* α *une action affine de* G *sur* $\mathcal{H}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *l'action a un point fixe ;*
- *il existe un point de* $\mathcal{H}$ *d'orbite bornée ;*
- *tout point de* $\mathcal{H}$ *est d'orbite bornée ;*
- *la fonction* b *est bornée.*

La démonstration repose sur le lemme géométrique classique suivant, établi par exemple dans [BdlHV08, lemme 2.2.7, p.78].

Lemme 1.3. — *Soient* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* A *une partie bornée non vide de* $\mathcal{H}$*. Alors il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant* A*, et son centre est uniquement déterminé.*

Ce lemme permet de montrer aisément la seule implication délicate, à savoir que s'il existe un point x d'orbite A bornée, alors l'action admet un point fixe. En effet, soit B la boule donnée par le lemme, de centre c. Alors α stabilise A, donc stabilise B par unicité d'une telle boule. Comme l'action est affine, elle fixe le centre c : on a notre point fixe.

Pour conclure la démonstration du lemme : si on a un point fixe c, alors pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $c = \pi(g)c + b(g)$, donc $\|b(g)\| \leqslant 2\|c\|$ et donc b est bornée, et si b est bornée, alors pour tous $x \in \mathcal{H}$ et $g \in \mathrm{G}$, on a $\|\alpha(g)x\| \leqslant \|x\| + \|b(g)\|$, donc tout point est d'orbite bornée.

On déduit trivialement la proposition du lemme : si G est compact, alors b étant continue, elle est bornée et donc G a la propriété (FH). ■

1.2.2 Groupe des nombres réels

Proposition 1.4. — *Le groupe topologique $(\mathbf{R}, +)$ n'a pas la propriété (T).*

Démonstration (via les action affines). — Le groupe des réels agit de manière isométrique affine sur $\mathbf{C}$ par translations, et ce sans point fixe. Il n'a donc pas la propriété (FH). Cette démontration se transpose sans difficulté aucune à tous les sous-groupes additifs non triviaux d'espaces de Hilbert, comme par exemple $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{Z}^n$ pour $n \geqslant 1$. ■

Démonstration (via les actions unitaires). — Nous allons montrer plus particulièrement que la représentation régulière $\lambda_{\mathbf{R}}$ a presque des vecteurs invariants mais pas de vecteurs invariants. Rappelons que cette représentation est définie par l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ via

$$(\lambda_{\mathbf{R}}(x)(f))(y) = f(y-x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}, f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}), y \in \mathbf{R}\ ;$$

cette action est bien unitaire grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translations. Soient Q un compact de $\mathbf{R}$ (que nous pouvons supposer inclus dans $[-t,t]$ pour un certain t positif), $\varepsilon > 0$ et $b = \frac{t}{\varepsilon}$. Considérons le vecteur unitaire

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{1}_{[0,b]}.$$

Nous avons alors, pour $x \in \mathrm{Q}$,

$$\begin{aligned}
\|\,\pi(x)\xi - \xi\,\|^2 &= \frac{1}{b}\int_{\mathbf{R}} \left(\mathbf{1}_{[0,b]}(y-x) - \mathbf{1}_{[0,b]}(y)\right)^2\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{b}\int_{\mathbf{R}} (\mathbf{1}_{[x,b+x]} + \mathbf{1}_{[0,b]} - 2\cdot\mathbf{1}_{[x,b+x]\cap[0,b]})(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2 - 2\frac{b-|x|}{b} \\
&\leqslant \frac{t}{b} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda_{\mathbf{R}}$ a presque des vecteurs invariants (puisque ξ est unitaire). Cependant, $\lambda_{\mathbf{R}}$ ne peut avoir de vecteur invariant non nul : par définition de l'action régulière, $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ n'est invariante que si elle est (presque partout) constante et une telle fonction n'est de carré intégrable que si elle est nulle. ■

1.2.3 Groupes de matrices

De nombreux groupes de matrices ont la propriété (T), parmi lesquels les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ pour $n \geqslant 3$ (nous donnons une démonstration partielle de ce résultat en annexe A). En revanche, les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ne l'ont pas. Ces résultats se trouvent déjà dans l'article original de Kazhdan [Kaž67].

1.3 Génération compacte

Le premier résultat intéressant concernant la propriété (T) est le suivant.

Théorème 1.5 (Kazhdan, 1967). — *Soit* G *un groupe localement compact et* σ*-compact. Si* G *a la propriété (T), alors* G *est engendré par un compact.*

Signalons d'emblée un corollaire aussi immédiat qu'important, qui motivait les recherches de D. Kazhdan.

Corollaire 1.6. — *Un groupe de Kazhdan discret est de type fini.*

Démonstration (du théorème 1.5, via les actions unitaires). — Soient $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de compacts (donc Q_n est contenu dans l'intérieur de Q_{n+1} et $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Q}_n = \mathrm{G}$) et, pour $n \geqslant 1$, G_n le sous-groupe ouvert engendré par Q_n. L'espace topologique quotient G/G_n est discret, car G_n est ouvert. Nous pouvons donc considérer l'action (à gauche) de G sur $\ell^2(\mathrm{G}/\mathrm{G}_n)$ par permutation des indices, ce qui nous définit une représentation unitaire de G, dite *quasi-régulière* et notée $\lambda_{\mathrm{G}/\mathrm{G}_n}$. Soient

$$\pi = \overline{\bigoplus_{n\geqslant 1}} \lambda_{\mathrm{G}/\mathrm{G}_n}$$

la représentation somme directe hilbertienne et $\mathcal{H}_\pi = \overline{\bigoplus}_{n\geqslant 1} \ell^2(\mathrm{G}/\mathrm{G}_n)$ l'espace de Hilbert associé.

Démontrons que cette représentation admet presque des vecteurs invariants. Soit Q un compact de G. Celui-ci est contenu dans un sous-groupe G_n pour n assez grand. Soit $\delta_{\mathrm{G}_n} \in \ell^2(\mathrm{G}/\mathrm{G}_n) \subset \mathcal{H}_\pi$ le vecteur dont l'indice G_n vaut (l'application constante) 1 et les autres, 0. Ce vecteur est clairement G_n-invariant pour la représentation quasi-régulière de G, il est donc *a fortiori* $(\mathrm{Q}, \varepsilon)$-invariant pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$.

Par hypothèse, G a la propriété (T), il existe donc un vecteur $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ non nul et G-invariant. Ce vecteur a au moins une composante $\xi_{\mathrm{G}_n} \in \ell^2(\mathrm{G}/\mathrm{G}_n)$ non nulle, pour un certain $n \in \mathbf{N}$. Or G agit transitivement sur G/G_n et une telle action ne peut laisser invariant un vecteur $\xi_{\mathrm{G}_n} \in \ell^2(\mathrm{G}/\mathrm{G}_n)$ non nul que si G/G_n est de cardinal fini. Ainsi, G_n est un sous-groupe d'indice fini de G, engendré par un compact, par conséquent G lui-même est engendré par un compact. ■

Remarque. — Il est naturel de se demander si les groupes de Kazhdan discrets sont de présentation finie (cette question se trouve déjà dans l'article de Kazhdan [Kaž67]). C'est faux en général, comme nous le verrons dans la troisième partie par un exemple dû à G. Margulis. Néanmoins Y. Shalom a montré dans [Sha00] que les groupes de Kazhdan discrets sont toujours des quotients de groupes de Kazhdan de présentation finie.

1.4 Résultats de stabilité

La propriété (T) est préservée par plusieurs constructions usuelles en théorie des groupes. Nous en donnons quelques exemples.

Proposition 1.7. — *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes topologiques,* G_2 *étant séparé, et* $\varphi : G_1 \to G_2$ *un homomorphisme continu. Si* G_1 *a la propriété (T) et que* φ *est d'image dense, alors* G_2 *a la propriété (T). En particulier, la propriété (T) passe aux quotients.*

Démonstration (via les actions unitaires). — Soit (Q_1, ε) une paire de Kazhdan pour G_1. Par continuité de φ et séparation de G_2, $\varphi(Q_1)$ est compact, montrons donc que $(\varphi(Q_1), \varepsilon)$ est une paire de Kazhdan pour G_2. Soient $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G_2 et $\xi \in \mathcal{H}$ un vecteur $(\varphi(Q_1), \varepsilon)$-invariant. Par continuité, $(\pi \circ \varphi, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G_1 : comme ξ est clairement (Q_1, ε)-invariant pour cette représentation et que G_1 a la propriété (T), il existe un vecteur $\eta \in \mathcal{H}$ qui est G_1-invariant pour la représentation $\pi \circ \varphi$. Il est donc aussi $\varphi(G_1)$-invariant pour la représentation π : comme $\varphi(G_1)$ est dense dans G_2 et que la représentation est fortement continue, η est bien un vecteur G_2-invariant. ■

Démonstration (via les actions isométriques affines). — Soit α_2 une action isométrique affine de G_2. Elle se relève en une action affine $\alpha_1 = \alpha_2 \circ \varphi$ de G_1. Par hypothèse, cette action admet un point fixe x. Alors x est fixe par tous les éléments de $\operatorname{Im} \varphi$ sous α_2. Comme c'est une partie dense et que α_2 est fortement continue, le point x est fixe pour tout G_2. Donc G_2 a la propriété (FH). ■

On en déduit le contre-exemple suivant : pour tout $n \geqslant 1$, le groupe libre F_n n'est pas de Kazhdan. En effet, F_n possède $\mathbf{Z}$ comme quotient, qui n'est pas de Kazhdan.

Proposition 1.8. — *Soient* G *un groupe topologique et* N *un sous-groupe distingué fermé de* G. *Si* N *et* G/N *ont la propriété (T), alors* G *l'a aussi.*

Démonstration (via les actions isométriques affines). — Soit α une action isométrique affine de G. On note $\mathcal{H}^N$ l'ensemble des points fixes de $\mathcal{H}$ par N, qui est non vide par hypothèse. Soit x_0 un élément de $\mathcal{H}^N$. Comme α est une action affine, $\mathcal{H}^N$ est un sous-espace affine de $\mathcal{H}$, et comme α est une action isométrique, c'est un fermé de $\mathcal{H}$. Sa direction $\mathcal{H}'$ est donc un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$. On définit sur $\mathcal{H}'$ une action affine α' de G par $\alpha'(g)x = \alpha(g)(x + x_0) - x_0$. C'est bien une action affine de G, telle que $\mathcal{H}'$ soit l'ensemble des points fixes par N. Comme N est distingué dans G, $\mathcal{H}'$ est stable par G ; en effet, si n est dans N et g dans G, on a n' dans N tel que $ng = gn'$ et donc pour x dans $\mathcal{H}'$: $\alpha(n)(\alpha(g)x) = \alpha(g)(\alpha(n')x) = \alpha(g)x$. De là, l'action passe au quotient G/N. Par hypothèse, cette action a alors un point fixe, et comme ce point est fixe pour les actions de N et G/N, il est fixe sous tout G. Donc G a bien la propriété (FH). ■

Des deux propositions précédentes, nous déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.9. — *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes topologiques. Leur produit direct* $G_1 \times G_2$ *a la propriété (T) si et seulement si* G_1 *et* G_2 *l'ont.*

Nous terminons cette partie en mentionnant deux autres résultats qui sont utiles pour exhiber des groupes ayant ou non la propriété (T). Le lecteur intéressé pourra trouver la démonstration de ces résultats dans [BdlHV08]. Rappelons que, pour un groupe localement compact G, il existe, sur l'ensemble des boréliens de G, une unique (à facteur constant près) mesure positive μ régulière non triviale et invariante pour l'action de G par translation à gauche, appelée *mesure de Haar (à gauche).* Nous renvoyons à [Wei40] ou à [Bou63] pour de plus amples développements sur cette notion. Un *réseau* est un sous-groupe discret Γ de G de covolume fini, c'est-à-dire tel qu'il existe un ensemble mesurable $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}$ tel que $\mu(\mathrm{K})$ est finie et $\Gamma\mathrm{K} = \mathrm{G}$.

Théorème 1.10. — *Soient* G *un groupe localement compact et* Γ *un réseau dans* G*. Le groupe* G *est de Kazhdan si et seulement si* Γ *l'est.*

Démonstration. — Voir [BdlHV08, théorème 1.7.1, p. 60] pour une démonstration utilisant les actions unitaires et [BdlHV08, propositions 2.5.5, p. 90 et 2.5.7, p. 92] pour une démonstration via les actions isométriques affines. ■

Proposition 1.11. — *Un groupe topologique abélien et de Kazhdan est compact. En particulier, si* G *est un groupe de Kazhdan, alors* $\mathrm{G}/\overline{[\mathrm{G},\mathrm{G}]}$ *est compact.*

Démonstration. — Voir [BdlHV08, corollaire 1.3.6, p. 39] pour une démonstration utilisant les actions unitaires et [BdlHV08, corollaire 2.5.10, p. 93] pour une démonstration via les actions isométriques affines. ■

Notons en particulier qu'un groupe abélien non compact (par exemple un groupe abélien infini discret) ne peut pas avoir la propriété (T). Nous retrouvons ainsi l'exemple de la proposition 1.4.

1.5 Définition cohomologique

Une autre définition de la propriété (T) fait intervenir une théorie cohomologique ; il se trouve que c'est la définition dont nous nous servirons pour établir le critère qui constitue l'outil central de cet exposé. Cette définition a l'avantage d'être immédiatement équivalente à la propriété (FH), dont elle constitue en quelque sorte une reformulation dans un langage différent. Fixons d'abord le vocabulaire lié à cette cohomologie.

On se fixe une action unitaire π de G sur $\mathcal{H}$. On considère alors les complexes de cochaînes $\mathrm{C}^k = \mathrm{C}^k(\mathrm{G},\pi)$ pour k entier qui sont les espaces des fonctions continues de G^k dans $\mathcal{H}$. Comme on ne s'intéressera qu'au premier groupe de cohomologie, on peut en fait se restreindre à $k \in \{0,1,2\}$. On définit alors les opérateurs de cobord sur C^0 (qu'on identifie canoniquement à $\mathcal{H}$) et sur C^1.

Pour ξ dans $\mathcal{H}$, on pose $\mathrm{d}\xi : g \mapsto \pi(g)\xi - \xi$. Pour f dans C^1, donc f une application continue de G dans $\mathcal{H}$, on pose $\mathrm{d}f : (g,h) \mapsto f(gh) - \pi(g)f(h) - f(g)$. On a bien

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\xi)(g,h) = \mathrm{d}\xi(gh) - \pi(g)\mathrm{d}\xi(h) - \mathrm{d}\xi(g) = \pi(gh)\xi - \xi - \pi(g)(\pi(h)\xi - \xi) - \pi(g)\xi + \xi = 0$$

donc les opérateurs linéaires ainsi définis vérifient la condition de cobord $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

De là, on pose naturellement $\mathrm{Z}^1 = \operatorname{Ker} \mathrm{d}$ l'espace des 1-cocycles et $\mathrm{B}^1 = \operatorname{Im} \mathrm{d}$ l'espace des 1-cobords, ainsi que le premier groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1 = \mathrm{Z}^1/\mathrm{B}^1$ (qui est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel complexe). Quand on voudra préciser le groupe et l'action sous-jacents, on écrira $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\pi)$ et ainsi de suite.

Faisons maintenant le lien avec la propriété (FH), qui est clair à la lumière des deux lemmes suivants.

Lemme 1.12. — *Soit b une application continue de G dans $\mathcal{H}$. Alors b est un 1-cocycle si et seulement si l'application α associée à π et b (voir la partie 1.1.2) est une action affine de G sur $\mathcal{H}$.*

Démonstration. — C'est essentiellement trivial : b est un 1-cocycle si et seulement si $b(gh)=\pi(g)b(h)+b(g)$, ce qui est exactement la condition qui fait de α un morphisme de groupes. En outre, b étant continue, la continuité forte de α se déduit de celle de π. ■

Lemme 1.13. — *Soit α une action affine de G sur $\mathcal{H}$ de partie linéaire π. Alors $b=b_\alpha$ est un 1-cobord si et seulement si α possède un point fixe.*

Démonstration. — Supposons que b soit un cobord : il existe $\xi\in\mathcal{H}$ tel que $b(g)=\pi(g)\xi-\xi$. Alors $\alpha(g)(-\xi)=-\pi(g)\xi+\pi(g)\xi-\xi$, donc $-\xi$ est un point fixe de l'action. Réciproquement, si $-\xi$ est point fixe de l'action, on a $\pi(g)\xi+b(g)=\xi$, donc $b(g)=\pi(g)\xi-\xi$, autrement dit $b=\mathrm{d}\xi$ est un cobord. ■

Notons que le lemme 1.2 montre que les 1-cobords sont précisément les 1-cocycles bornés, ce qui est un critère utile.

De là, on en déduit immédiatement le résultat suivant.

Proposition 1.14. — *Soit G un groupe topologique. Alors G a la propriété (FH) si et seulement si pour toute action unitaire π, l'espace vectoriel $\mathrm{H}^1(\mathrm{G},\pi)$ est trivial.*

1.6 Équivalence des définitions

Théorème 1.15 (Delorme-Guichardet). — *Soit G un groupe topologique.*

1. *Si G a la propriété (T), alors il a la propriété (FH).*
2. *Si G est localement compact et σ-compact et a la propriété (FH), alors il a la propriété (T).*

Démonstration (de la seconde assertion). — On raisonne par contraposée : si G n'a pas la propriété (T), on se donne une action unitaire π dans $\mathcal{H}$ qui a presque des vecteurs invariants mais pas de vecteurs invariants non nuls. On se donne également une suite exhaustive de compacts $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (donc Q_n est contenu dans l'intérieur de Q_{n+1} et $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathrm{Q}_n=\mathrm{G}$).

Par hypothèse, il existe, pour tout n, un vecteur unitaire $\xi_n\in\mathcal{H}$ tel que pour tout g dans Q_n,

$$\|\pi(g)\xi_n-\xi_n\|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

On pose, pour tout g dans G, $b(g)=(n(\pi(g)\xi_n-\xi_n))_n$. Montrons que b est une application continue de G vers $\ell^2(\mathcal{H})$. Si K est un compact de G, il existe un rang N à partir duquel K est inclus dans Q_n.

Alors on a
$$\sum_{n=N}^{\infty} \|b(g)_n\|^2 \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^2}{2^{2n}}.$$
On a donc convergence uniforme de la série sur les compacts, ce qui donne définition et continuité. De plus, en regardant composante par composante, il est clair que b est un cocycle.

Comme G n'a pas de vecteurs invariants, pour tout n, il existe (cf. la première démonstration de la proposition 1.1) g_n dans G tel que
$$\|\pi(g_n)\xi_n - \xi_n\| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$
et donc $\|b(g_n)\|^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$. Ainsi b n'est pas bornée, donc ce n'est pas un cobord, ce qui montre que le premier groupe de cohomologie associé à l'action de G sur $\ell^2(\mathcal{H})$ n'est pas trivial, et donc que G n'a pas la propriété (FH), ce que nous voulions démontrer.

Pour une démonstration de la première assertion, nous renvoyons à [BdlHV08, théorème 2.12.4, p. 129]. ■

Remarque. — Il existe encore au moins une autre caractérisation de la propriété (T), dont nous ne parlerons pas dans ces notes, qui s'énonce ainsi : un groupe G a la propriété (T) si et seulement si la représentation triviale 1_G (c'est-à-dire $1_G : G \to \mathcal{U}(\mathbf{C}) : g \mapsto \mathrm{id}$) est isolée dans l'espace dual $\hat{G}$ des (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles unitaires de G (qui est muni d'une certaine topologie, dite *de Fell*, cf. [BdlHV08, partie I.1.2, p. 32 et appendice F, p. 395]). Historiquement, c'est via cette caractérisation que D. Kazhdan a introduit la propriété (T), dans l'article [Kaž67], et c'est elle qui justifie l'usage de la lettre T pour désigner cette propriété.

2

Critère spectral de Żuk

À cause de la forme même des définitions, qui portent sur toute une classe, vaste a priori, de représentations du groupe, il peut être difficile de montrer « à la main » qu'un groupe possède la propriété (T). Il est donc naturel de chercher des critères systématiques que l'on puisse appliquer sans trop de difficulté. Nous étudions dans cette partie le critère dit spectral de Żuk, qui permet d'établir la propriété (T) pour le groupe fondamental de certains espaces. Ce critère a été démontré par A. Żuk dans [Żuk96].

2.1 Complexes simpliciaux

Définissons d'abord lesdits espaces. Avant de donner une définition formelle (adaptée à nos besoins), une vision intuitive : un 2-complexe simplicial est un espace découpé en triangles (le 2 du nom vient du fait que les triangles sont de dimension 2). Les triangles sont plongés (ils ne se replient pas sur eux-même) et ils se rencontrent selon leurs arêtes ou leurs sommets.

Définition 2.1. — *Un 2-complexe simplicial est un espace topologique séparé X muni d'une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ de plongements d'un triangle plein fermé T du plan tels que*

- *l'ensemble des images des plongements φ_i recouvre X ;*
- *tout point de X a un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini d'images de T ;*
- *si on appelle naturellement triangles, arêtes et sommets de X les images de T, ses arêtes et ses sommets, alors l'intersection de deux triangles de X se fait selon l'ensemble vide, un de leur sommet ou une de leurs arêtes.*

On dit qu'un 2-complexe simplicial est fini s'il a un nombre fini de triangles (et donc d'arêtes et de sommets).

On se fixe $\widetilde{X}$ un 2-complexe simplicial et Γ un groupe discret muni d'une action simpliciale libre sur $\widetilde{X}$, c'est-à-dire que l'action envoie par homéomorphisme tout simplexe de $\widetilde{X}$ sur un autre simplexe de même dimension et est telle que seul le neutre fixe un point. Nous exigerons de plus que le quotient

$\mathrm{X} = \Gamma\backslash\widetilde{\mathrm{X}}$, qui est encore un 2-complexe simplicial, soit *fini*.

Les triangles, les arêtes et les sommets peuvent être munis de deux *orientations*. Une orientation d'un sommet est simplement le choix d'un signe $+$ ou $-$ associé au sommet. Une orientation d'une arête consiste à choisir parmi ses deux sommets, ou extrémités, lequel est l'origine et lequel est l'arrivée de l'arête. Une orientation d'un triangle consiste à choisir un ordre de parcours parmi ses sommets. On fixe une bonne fois pour toute une orientation pour chaque simplexe de $\widetilde{\mathrm{X}}$ invariante par l'action de Γ, c'est-à-dire que si $\gamma \in \Gamma$ envoie une arête e de $\widetilde{\mathrm{X}}$ sur une arête e', alors elle envoie respectivement l'origine et l'arrivée de e sur les extrêmités correspondantes de e' (et similairement pour les triangles). Ceci est possible car l'action est simpliciale libre. On note respectivement $\mathrm{S}^0(\widetilde{\mathrm{X}})$, $\mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})$ et $\mathrm{S}^2(\widetilde{\mathrm{X}})$ l'ensemble des sommets, arêtes et triangles de $\widetilde{\mathrm{X}}$, munis de cette orientation. On définit enfin $\mathrm{S}^r(\mathrm{X})$ $(r = 0, 1, 2)$ par $\mathrm{S}^r(\mathrm{X}) = \Gamma\backslash\mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})$: étant donné que nous avons choisi une orientation Γ-invariante pour les simplexes de $\widetilde{\mathrm{X}}$, celle-ci induit une orientation sur les simplexes de X.

Pour $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{Y} = \widetilde{\mathrm{X}}$, nous définissons, pour $v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{Y})$ et $e \in \mathrm{S}^1(\mathrm{Y})$:

$$[v : e] = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est l'arrivée de } e, \\ -1 & \text{si } v \text{ est l'origine de } e, \\ 0 & \text{si } v \text{ n'est pas un sommet de } e. \end{cases}$$

De même, si $e \in \mathrm{S}^1(\mathrm{Y})$ et $t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{Y})$, nous définissons :

$$[e : t] = \begin{cases} 1 & \text{si l'origine et l'arrivée de } e \text{ apparaissent dans cet ordre dans l'orientation de } t, \\ -1 & \text{s'ils apparaissent dans l'ordre inverse,} \\ 0 & \text{si } e \text{ n'est pas une arête de } t. \end{cases}$$

Remarquons que pour un triangle t et un sommet s de ce triangle fixés, il y a exactement deux arêtes e tels que $s \subset e \subset t$, et on voit qu'elles doivent vérifier respectivement $[s : e][e : t] = \pm 1$. Nous en déduisons l'égalité suivante, qui nous sera utile par la suite :

$$\sum_{e \in \mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})} [s : e][e : t] = 0. \tag{2.1}$$

2.2 Cohomologie du groupe fondamental

On ne donnera pas ici de définitions précises du groupe fondamental et du revêtement universel d'un complexe simplicial, bien que ce soit en fait le cadre dans lequel on travaille ; le lecteur désireux d'en savoir davantage est encouragé à consulter [Hat02], le premier chapitre en particulier.

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire fixée de Γ. On considère alors, pour $r = 0, 1, 2$, l'espace vectoriel complexe $\mathrm{C}^r = \mathrm{C}^r(\widetilde{\mathrm{X}}, \pi)$ des r-cochaînes, qui sont les fonctions f de $\mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})$ dans $\mathcal{H}$ qui sont Γ-équivariantes, c'est-à-dire telles que si $\gamma \in \Gamma$, alors pour tout $x \in \mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})$,

$$f(\gamma \cdot x) = \pi(\gamma) f(x).$$

On définit alors pour $f \in \mathrm{C}^r$ la $(r+1)$-cochaîne $\mathrm{d}f$ par

$$\mathrm{d}f(s) = \sum_{t \in \mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})} [t : s] f(t)$$

pour tout $s \in \mathrm{S}^{r+1}(\widetilde{\mathrm{X}})$. C'est bien défini puisque $[t:s]$ est nul sauf si $t \subset s$, donc sauf pour un nombre fini d'éléments. On notera parfois l'opérateur d^r pour spécifier le degré sur lequel on travaille. On vérifie facilement la Γ-équivariance. On vérifie également que d est un opérateur de cobord : soit $f \in \mathrm{C}^0$ et soit $t \in \mathrm{S}^2(\widetilde{\mathrm{X}})$. Alors, en utilisant (2.1) pour la dernière égalité, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}f)(t) &= \sum_{e \in \mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})} [e:t]\mathrm{d}f(e) \\ &= \sum_{e \in \mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})} \sum_{s \in \mathrm{S}^0(\widetilde{\mathrm{X}})} [s:e][e:t]f(s) \\ &= \sum_{s \in \mathrm{S}^0(\widetilde{\mathrm{X}})} f(s) \sum_{e \in \mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})} [s:e][e:t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc définir le premier groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1 = \mathrm{H}^1(\widetilde{\mathrm{X}}, \pi)$ comme étant $\mathrm{Ker}\ \mathrm{d}^1 / \mathrm{Im}\ \mathrm{d}^0$, dont on montre dans l'annexe B qu'il est isomorphe au groupe $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \pi)$ construit dans la première partie, et dont il s'agira donc de montrer qu'il est nul sous certaines conditions.

On définit également un produit scalaire hermitien sur les C^r ($r = 0, 1, 2$) par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}^r(\mathrm{X})} \langle f(\sigma), g(\sigma) \rangle \cdot n(\sigma),$$

où $n(\sigma)$ est le nombre de triangles contenant σ (rappelons qu'on a fixé une orientation pour chaque triangle). La somme porte sur les éléments de $\mathrm{S}^r(\mathrm{X})$ (en notant, par abus, de la même manière un élément de $\mathrm{S}^r(\mathrm{X})$ et un représentant dans $\mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})$), mais cela ne pose pas de problème de définition puisque si $\sigma' = \gamma \cdot \sigma$ alors

$$\langle f(\sigma'), g(\sigma') \rangle = \langle \pi(\gamma) f(\sigma), \pi(\gamma) g(\sigma) \rangle = \langle f(\sigma), g(\sigma) \rangle,$$

grâce à l'équivariance de f et au fait que π est unitaire. De même $n(\sigma)$ ne dépend pas du choix du représentant. Notons que le fait de sommer sur X est indispensable : seul X est fini.

On peut alors considérer l'adjoint d^* de l'opérateur d pour ce produit scalaire, pour lequel on a une formule explicite. Pour $g \in \mathrm{C}^{r+1}$ ($r = 0, 1$) et $s \in \mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})$, on a :

$$\mathrm{d}^* g(s) = \sum_{t \in \mathrm{S}^{r+1}(\widetilde{\mathrm{X}})} [s:t] \frac{n(t)}{n(s)} g(t).$$

Vérifions que d^* est bien l'adjoint de d. Soient $f \in \mathrm{C}^r$ et $g \in \mathrm{C}^{r+1}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}f, g \rangle &= \sum_{t \in \mathrm{S}^{r+1}(\mathrm{X})} \langle \mathrm{d}f(t), g(t) \rangle \cdot n(t) \\ &= \sum_{t \in \mathrm{S}^{r+1}(\mathrm{X})} \sum_{s \in \mathrm{S}^r(\mathrm{X})} [s:t] n(t) \langle f(s), g(t) \rangle \\ &= \sum_{s \in \mathrm{S}^r(\mathrm{X})} \langle f(s), \sum_{t \in \mathrm{S}^{r+1}(\mathrm{X})} [s:t] \frac{n(t)}{n(s)} g(t) \rangle \cdot n(s) \\ &= \sum_{s \in \mathrm{S}^r(\mathrm{X})} \langle f(s), \mathrm{d}^* g(s) \rangle \cdot n(s) \\ &= \langle f, \mathrm{d}^* g \rangle. \end{aligned}$$

On trouve bien la relation voulue.

2.3 Link et laplacien

La condition cherchée pour que Γ soit de Kazdhan portera sur certains graphes appelés *links* du 2-complexe. Ces links ont pour but de capturer l'information locale en chaque sommet du complexe. Plus précisément :

Définition 2.2. — *Pour tout sommet v d'un 2-complexe simplicial Y, on note $L(v)$, et on appelle link de Y en v, le graphe dont les sommets sont les arêtes de Y ayant v comme extrémité et dont deux sommets sont voisins s'ils sont distincts et s'il existe un triangle (alors unique) de Y contenant les arêtes (de Y) représentées par ces sommets.*

Dans la suite, $L(v)$ désignera aussi bien le graphe que l'ensemble de ses sommets ; ce léger abus de notation ne devrait pas prêter à confusion. Notons que la définition du link étant locale, si v est un sommet de X et $\widetilde{v}$ un relevé de v à $\widetilde{X}$, alors ils ont le même link (à isomorphime de graphe près, s'entend).

Exemple 2.1. — Soit le 2-complexe simplicial formé des quatre faces d'un tétraèdre (cf. figure 2.1). Le link d'un quelconque de ses sommets est un graphe cyclique à trois sommets, représenté à la figure 2.2.

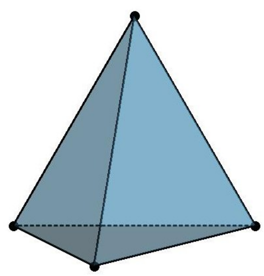


FIGURE 2.1 – Un 2-complexe simplicial formé des quatre faces d'un tétraèdre.

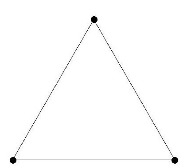


FIGURE 2.2 – Le link d'un quelconque des sommets du complexe de la figure 2.1.

Nous allons ensuite récupérer l'information locale des cochaînes en chaque sommet, et la transposer sur le link. On dira que $f \in C^1$ est *localisée* en un sommet v de X si pour tout $e \in S^1(\widetilde{X})$ dont le projeté sur X ne contient pas v, $f(e) = 0$. Autrement dit, f ne charge que les arêtes contenant un relevé de v.

Si $f \in \mathrm{C}^1$ est quelconque et que v est un sommet de X, on définit le localisé de f en v comme l'élément $f_v \in \mathrm{C}^1$ tel que pour tout $e \in \mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})$:

$$f_v(e) = \begin{cases} f(e) & \text{si une des extrémités de } e \text{ est un relevé de } v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit qu'à chaque 1-cochaîne f localisée en v correspond une fonction sur les sommets de $\mathrm{L}(v)$, qui est essentiellement la même fonction puisque les seuls points sur lesquels f est non nulle sont précisément les sommets de $\mathrm{L}(v)$. Plus spécifiquement, soit $\widetilde{v}$ un relevé de v, soit s un sommet de $\mathrm{L}(v)$ et soit $e \in \mathrm{C}^1$ l'arête représentée par s qui contient $\widetilde{v}$. On pose $f_v^*(s) = f(e)$ si $\widetilde{v}$ est l'origine de e, et $f_v^*(s) = -f(e)$ sinon. Si $f \in \mathrm{C}^1$, on notera f_v^* la fonction sur l'ensemble des sommets de $\mathrm{L}(v)$ associée à f_v.

On définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{H}^{\mathrm{L}(v)}$ par essentiellement la même formule que pour C^1 :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in \mathrm{L}(v)} \langle f(s), g(s) \rangle \cdot \mathrm{N}(s),$$

où $\mathrm{N}(s)$ est le nombre de voisins de s dans $\mathrm{L}(v)$ (c'est-à-dire $n(s)$ si on voit s comme arête de $\widetilde{\mathrm{X}}$). Il est immédiat par définition que si $f \in \mathrm{C}^1$, alors

$$\langle f_v, f_v \rangle = \langle f_v^*, f_v^* \rangle. \tag{2.2}$$

On définit de manière classique le laplacien sur $\mathrm{L}(v)$ pour des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe E. Si $f : \mathrm{L}(v) \to \mathrm{E}$, alors son laplacien est défini par :

$$\Delta_{\mathrm{E}} f : \mathrm{L}(v) \to \mathrm{E} : s \mapsto f(s) - \frac{1}{\mathrm{N}(s)} \sum_{t \text{ voisin de } s} f(t).$$

Par la suite, nous omettrons l'indice E lorsque $\mathrm{E} = \mathcal{H}$.

Si $\mathrm{E} = \mathcal{H}$, on vérifie que le laplacien est un opérateur auto-adjoint vis-à-vis du produit scalaire défini précédemment : pour toutes $f, g \in \mathcal{H}^{\mathrm{L}(v)}$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta f, g \rangle &= \sum_{s \in \mathrm{L}(v)} \langle \Delta f(s), g(s) \rangle \cdot \mathrm{N}(s) \\ &= \langle f, g \rangle - \sum_{s \in \mathrm{L}(v)} \sum_{t \text{ voisin de } s} \langle f(t), g(s) \rangle \\ &= \langle f, g \rangle - \sum_{(s,t) \in \mathrm{L}(v)^2 \text{ voisins}} \langle f(t), g(s) \rangle \\ &= \langle f, g \rangle - \sum_{t \in \mathrm{L}(v)} \sum_{s \text{ voisin de } t} \langle f(t), g(s) \rangle \\ &= \sum_{t \in \mathrm{L}(v)} \langle f(t), \Delta g(t) \rangle \cdot \mathrm{N}(t) \\ &= \langle f, \Delta g \rangle. \end{aligned}$$

On a alors pour $f \in \mathrm{C}^1$ l'égalité fondamentale suivante : pour tout sommet v de X,

$$\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v \rangle = \langle \Delta f_v^*, f_v^* \rangle. \tag{2.3}$$

En effet, comme $n(t) = 1$ lorsque t est un triangle,

$$\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v \rangle = \sum_{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X})} \langle \mathrm{d}f_v(t), \mathrm{d}f_v(t) \rangle.$$

On note que $\mathrm{d}f_v(t)$ vaut 0 sauf si v est un sommet de t, et dans ce cas en notant e_t et e'_t les deux arêtes de t contenant v : $\mathrm{d}f_v(t) = [e_t : t]f(e_t) + [e'_t : t]f(e'_t)$. Le choix d'orientation dans la définition de f_v^* garantit que, si les sommets s et s' de $\mathrm{L}(v)$ correspondent respectivement à e_t et e'_t, alors $\langle [e_t : t]f(e_t), [e'_t : t]f(e'_t) \rangle = -\langle f_v^*(s), f_v^*(s') \rangle$. De là,

$$\langle \mathrm{d}f_v(t), \mathrm{d}f_v(t) \rangle = \langle f_v^*(s), f_v^*(s) \rangle + \langle f_v^*(s'), f_v^*(s') \rangle - \langle f_v^*(s), f_v^*(s') \rangle - \langle f_v^*(s'), f_v^*(s) \rangle.$$

Dans la somme $\sum_{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X})} \langle \mathrm{d}f_v(t), \mathrm{d}f_v(t) \rangle$, chaque $\langle f_v^*(s), f_v^*(s) \rangle$ apparaît donc autant de fois qu'il y a de triangles qui contiennent s, c'est-à-dire $\mathrm{N}(s)$ fois. On a aussi un terme $-\langle f_v^*(s), f_v^*(s') \rangle$ pour chaque couple de voisins (s, s'). Donc :

$$\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v \rangle = \sum_{s \in \mathrm{L}(v)} \langle f_v^*(s), f_v^*(s) \rangle \cdot \mathrm{N}(s) - \sum_{(s,s') \text{ voisins}} \langle f_v^*(s), f_v^*(s') \rangle = \langle \Delta f_v^*, f_v^* \rangle$$

en utilisant le résultat intermédiaire obtenu plus haut sur le calcul de $\langle \Delta f, g \rangle$.

Concluons cette partie par une propriété des laplaciens Δ_E sur les graphes finis connexes : leur noyau est réduit aux fonctions constantes et toutes leurs valeurs propres sont dans $[0; 2]$. Montrons-le dans un premier temps pour $\Delta_\mathbf{R}$. En ce cas, pour le premier point, soit f harmonique sur $\mathrm{L}(v)$, qu'on suppose connexe (ce sera de toute façon une hypothèse du théorème). Quitte à lui soustraire sa valeur maximale, on peut supposer f négative, et s'annulant en un point. Pour tout point s d'annulation de f, on a $\Delta f(s) - f(s) = 0$ donc $\sum_{s' \text{ voisin de } s} f(s') = 0$, et donc comme f est négative, f est nulle sur tous les voisins de s. On conclut par connexité. Pour le deuxième point, soit f un vecteur propre de Δ. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f ne prend pas que des valeurs négatives. Si elle atteint son maximum en s, alors $f(s) \geqslant \frac{1}{\mathrm{N}(s)} \sum_{s' \text{ voisin de } s} f(s')$, donc $\Delta f(s) \geqslant 0$, et donc la valeur propre ne peut être strictement négative, puisque $f(s) > 0$. On voit que les valeurs propres sont inférieures à 2 par le théorème de Gerschgorin–Hadamard appliqué à la matrice de Δ dans la base canonique, dans laquelle chaque ligne est constituée d'un 1 sur la diagonale, et de $\mathrm{N}(s)$ coefficients $-\frac{1}{\mathrm{N}(s)}$; la norme L^1 de chaque ligne est donc 2, et donc toute valeur propre est inférieure à 2.

Lorsque E est un espace vectoriel réel quelconque, on se ramène au cas précédent de la façon suivante. Soient f un vecteur propre de Δ_E de valeur propre λ, x un élément non nul de E et $p : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ une projection de E sur $\mathbf{R}x$, identifié à $\mathbf{R}$. Par linéarité, il est immédiat de voir que $p \circ f$ est un vecteur propre de $\Delta_\mathbf{R}$ de même valeur propre λ. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\Delta_\mathrm{E}) \subseteq \mathrm{Sp}(\Delta_\mathbf{R})$, et donc $\mathrm{Sp}(\Delta_\mathrm{E}) \subseteq [0; 2]$ par la discussion précédente. Ensuite, soit f dans le noyau de Δ_E. On choisit une base $\{e_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ de E et on considère la famille duale $\{e_i^*\}$. Par le même argument que précédemment, pour tout $i \in \mathrm{I}$, $e_i^* \circ f$ est dans le noyau de $\Delta_\mathbf{R}$, donc est constante. Ainsi, f est constante. Enfin, le cas $\mathrm{E} = \mathcal{H}$ se ramène au cas réel car $\Delta_\mathcal{H}$ est auto-adjoint (son spectre est donc réel).

2.4 Le critère spectral

On va démontrer le théorème suivant, dont l'énoncé garde les mêmes notations que dans le texte ci-dessus.

Théorème 2.1 (A. Żuk, 1996 [Żuk96]). — *Pour tout $v \in \mathrm{S}^0(\widetilde{\mathrm{X}})$, on note c_v la plus petite valeur propre strictement positive du laplacien $\Delta_{\mathbf{R}}$ sur $\mathrm{L}(v)$. On pose $c = \min(c_v + c_w)$ où le minimum est pris sur toutes les paires $\{v, w\}$ de sommets voisins. Si les links de $\widetilde{\mathrm{X}}$ sont connexes et que $c > 1$, alors Γ vérifie la propriété (T).*

On observe que les conditions sur $\widetilde{\mathrm{X}}$ sont locales, il suffit donc de les vérifier sur X. On peut donc conclure que le groupe fondamental de X a la propriété (T) sans aucune étude supplémentaire du revêtement universel.

Comme $\mathrm{Sp}(\Delta) \subseteq \mathrm{Sp}(\Delta_{\mathbf{R}})$, la condition sur les valeurs propres de $\Delta_{\mathbf{R}}$ se transmet à Δ, ce que nous utiliserons dans les démonstrations.

Lemme 2.2. — *Soit $f \in \mathrm{C}^1$. Alors :*

$$\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f \rangle = \sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \left(\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v \rangle - \frac{1}{2} \langle f_v, f_v \rangle \right).$$

Démonstration. — Soient $v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})$ et $t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X})$ avec $v \in t$. Alors si on note e, e' et e_v les arêtes de t, avec e_v celle ne contenant pas v, on trouve

$$\mathrm{d}f(t) = [e:t]f(e) + [e':t]f(e') + [e_v:t]f(e_v) = \mathrm{d}f_v(t) + [e_v:t]f(e_v)$$

car $f_v(e_v) = 0$. En revanche, si v n'est pas un sommet de t, $\mathrm{d}f_v(t) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v \rangle &= \sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \sum_{\substack{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X}) \\ v \in t}} \langle \mathrm{d}f_v(t), \mathrm{d}f_v(t) \rangle \\
&= \sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \sum_{\substack{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X}) \\ v \in t}} \langle \mathrm{d}f(t) - [e_v:t]f(e_v), \mathrm{d}f(t) - [e_v:t]f(e_v) \rangle \\
&= \mathrm{Re} \sum_{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X})} \sum_{\substack{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X}) \\ v \in t}} \left(\langle \mathrm{d}f(t), \mathrm{d}f(t) \rangle - 2 \langle \mathrm{d}f(t), [e_v:t]f(e_v) \rangle \right) \\
&\qquad + \sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \sum_{\substack{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X}) \\ v \in t}} \langle f(e_v), f(e_v) \rangle.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \sum_{\substack{t \in \mathrm{S}^2(\mathrm{X}) \\ v \in t}} \langle f(e_v), f(e_v) \rangle &= \sum_{e \in \mathrm{S}^1(\mathrm{X})} \langle f(e), f(e) \rangle \cdot n(e) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \sum_{\substack{e \in \mathrm{S}^1(\mathrm{X}) \\ v \in e}} \langle f_v(e), f_v(e) \rangle \cdot n(e).
\end{aligned}$$

Si on ajoute le fait que $\sum_{v\in t}[e_v : t]f(e_v) = \mathrm{d}f(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})}\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v\rangle &= \sum_{t\in \mathrm{S}^2(\mathrm{X})}(3\langle \mathrm{d}f(t), \mathrm{d}f(t)\rangle - 2\langle \mathrm{d}f(t), \mathrm{d}f(t)\rangle) + \frac{1}{2}\sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})}\sum_{\substack{e\in \mathrm{S}^1(\mathrm{X})\\ v\in e}}\langle f_v(e), f_v(e)\rangle\cdot n(e)\\ &= \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f\rangle + \frac{1}{2}\sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})}\langle f_v, f_v\rangle. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Remarquons que la projection de f_v^* sur l'espace des fonctions constantes sur $\mathrm{L}(v)$, c'est-à-dire sur le noyau de Δ, est $\frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)$. En effet, soit ξ un élément de $\mathcal{H}$ vu comme une fonction constante :

$$\begin{aligned}\langle f_v^*, \xi\rangle &= \sum_{s\in \mathrm{L}(v)}\langle f_v^*(s), \xi\rangle_{\mathcal{H}}\mathrm{N}(s)\\ &= \langle \sum_{s\in \mathrm{L}(v)} f_v^*(s)\mathrm{N}(s), \xi\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \langle \sum_{e\in \mathrm{S}^1(\widetilde{\mathrm{X}})}[v:e]f(e)n(e), \xi\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \langle n(v)\mathrm{d}^*f(v), \xi\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}^*f(v), \xi\rangle\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de ce que $n(v) = \frac{1}{2}\sum_{s\in \mathrm{L}(v)}\mathrm{N}(s)$ ($\frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)$ est ici vu comme une fonction constante). Retenons d'ailleurs l'égalité suivante : pour toute (fonction) constante k,

$$\langle f_v^*, k\rangle = \langle d^*f(v), k\rangle_{\mathcal{H}}\, n(v). \tag{2.4}$$

Lemme 2.3. — *Soit $f\in \mathrm{C}^1$. Alors :*

$$\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f\rangle + \langle \mathrm{d}^*f, \mathrm{d}^*f\rangle \geqslant (c-1)\langle f, f\rangle.$$

Démonstration. — Comme Δ est auto-adjoint, il stabilise l'orthogonal des fonctions constantes sur $\mathrm{L}(v)$. Donc $\langle \Delta f_v^*, f_v^*\rangle = \langle \Delta(f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)), f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)\rangle$. De plus, comme c_v minore la plus petite valeur propre de Δ sur cet orthogonal, on a, pour toute fonction $x : \mathrm{L}(v)\to \mathcal{H}$ orthogonale aux constantes, l'inégalité $\langle \Delta(x), x\rangle \geqslant c_v\langle x, x\rangle$. D'où, par la formule (2.3) :

$$\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v\rangle = \langle \Delta f_v^*, f_v^*\rangle \geqslant c_v\langle f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v), f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)\rangle.$$

De plus, en vertu des formules (2.2) et (2.4),

$$\begin{aligned}\langle f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v), f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)\rangle &= \langle f_v^*, f_v^* - \frac{1}{2}\mathrm{d}^*f(v)\rangle\\ &= \langle f_v^*, f_v^*\rangle - \frac{1}{2}\langle f_v^*, \mathrm{d}^*f(v)\rangle\\ &= \langle f_v, f_v\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}^*f(v), \mathrm{d}^*f(v)\rangle_{\mathcal{H}}n(v).\end{aligned}$$

De là :

$$\langle \mathrm{d}f_v, \mathrm{d}f_v\rangle - \frac{1}{2}\langle f_v, f_v\rangle \geqslant (c_v - \frac{1}{2})\langle f_v, f_v\rangle - \frac{c_v}{2}\langle \mathrm{d}^*f(v), \mathrm{d}^*f(v)\rangle n(v).$$

En sommant sur $v \in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})$, nous avons, grâce au lemme 2.2 :

$$\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f\rangle + \sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \frac{c_v}{2}\langle \mathrm{d}^*f(v), \mathrm{d}^*f(v)\rangle n(v) \geqslant \sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} (c_v - \frac{1}{2})\langle f_v, f_v\rangle.$$

Comme $c_v \leqslant 2$ pour tout v, on a :

$$\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f\rangle + \langle \mathrm{d}^*f, \mathrm{d}^*f\rangle \geqslant \langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}f\rangle + \sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} \frac{c_v}{2}\langle \mathrm{d}^*f(v), \mathrm{d}^*f(v)\rangle n(v).$$

Donc pour finir la démonstration, il suffit d'établir que $\sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})}(c_v - \frac{1}{2})\langle f_v, f_v\rangle \geqslant (c-1)\langle f, f\rangle$. Or :

$$\sum_{v\in \mathrm{S}^0(\mathrm{X})} (c_v - \frac{1}{2})\langle f_v, f_v\rangle = \sum_{e\in \mathrm{S}^1(\mathrm{X})} ((c_v + c_w - 1)\langle f(e), f(e)\rangle n(e)) \geqslant (c-1)\langle f, f\rangle,$$

où les v et w apparaissant dans la dernière somme sont les extrêmités de e. ■

On termine la démonstration du théorème 2.1. Soit $\mathrm{C} = c - 1 > 0$. Il suffit de montrer que si $f \in \mathrm{Z}^1 = \mathrm{Ker}\ \mathrm{d}^1$, alors on a $g \in \mathrm{C}^0$ tel que $f = \mathrm{d}g$. Déjà, si $f \in \mathrm{Z}^1$, le lemme précédent donne :

$$\langle \mathrm{d}^*f, \mathrm{d}^*f\rangle = \langle \mathrm{dd}^*f, f\rangle \geqslant \mathrm{C}\langle f, f\rangle. \tag{2.5}$$

Cela implique clairement que $\mathrm{dd}^* : \mathrm{Z}^1 \longrightarrow \mathrm{Z}^1$ est injectif.

Montrons que dd^* est surjectif. Tout d'abord, $\mathrm{Im}\,\mathrm{dd}^*$ est fermée. En effet, soit $(f_n = \mathrm{dd}^*g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathrm{Im}\,\mathrm{dd}^*$ convergeant vers $f \in \mathrm{Z}^1$. Montrons qu'il existe $g \in \mathrm{Z}^1$ telle que $f = \mathrm{dd}^*g$. Soient $p, q \in \mathbf{N}$: grâce à l'inégalité (2.5) et à celle de Cauchy–Schwarz,

$$\mathrm{C}\langle g_q - g_p, g_q - g_p\rangle \leqslant \langle g_q - g_p, f_q - f_p\rangle \leqslant \| g_q - g_p \| \| f_q - f_p \|.$$

Donc $\| g_q - g_p \| \leqslant \frac{1}{\mathrm{C}} \| f_q - f_p \|$. De là, la suite (g_n) est de Cauchy, donc converge vers $g \in \mathrm{Z}^1$ (rappelons que Z^1 est fermé et que d et d^* sont continus). Ainsi (f_n) converge vers dd^*g.

Ensuite, si f est un élément de l'orthogonal de $\mathrm{Im}\ \mathrm{dd}^*$, alors $0 = \langle \mathrm{dd}^*f, f\rangle \geqslant \mathrm{C}\langle f, f\rangle$, donc $f = 0$, et donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{dd}^* = \mathrm{Z}^1$. De là, dd^* est inversible. Donc si $f \in \mathrm{Z}^1$:

$$f = (\mathrm{dd}^*)(\mathrm{dd}^*)^{-1}(f) = \mathrm{d}g,$$

avec $g = \mathrm{d}^*(\mathrm{dd}^*)^{-1}(f)$.

Ainsi, $\mathrm{H}^1(\widetilde{\mathrm{X}}, \pi) = 0$. Ceci étant vrai pour toute représentation unitaire π, le groupe Γ a bien la propriété (T).

2.5 Remarque

La constante 1 apparaissant dans le critère spectral est optimale. En effet, $\mathbf{Z}$ n'a pas la propriété (T) (cf. proposition 1.4) mais il s'agit du groupe fondamental du complexe simplicial représentant une « Triforce encerclée » (cf. figure 2.3), dont les links sont des chaînes à quatre sommets (cf. figure 2.4), lesquels ont un laplacien de spectre $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}$. Le minimum c apparaissant dans le théorème 2.1 vaut donc 1.

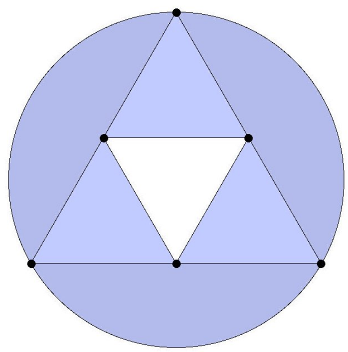


FIGURE 2.3 – La « Triforce encerclée », dont $\mathbf{Z}$ est le groupe fondamental.

FIGURE 2.4 – Le link de la Triforce encerclée.

3

Immeubles triangulaires

Dans cette dernière partie, nous décrivons une famille de groupes vérifiant le critère spectral de Żuk (ce qui nous permet donc d'établir la propriété (T) sans avoir à étudier les représentations de ces groupes). Nos exemples proviennent de la théorie des immeubles de Tits. Toutefois, nous ne rentrerons pas dans les détails de cette riche et belle théorie (le lecteur intéressé est invité à consulter [Bro89], [Ron89] ou [Wei03, Wei09] pour une introduction et [AB08] pour des développements plus poussés) et nous contenterons donc de définitions *ad hoc*.

3.1 Plans projectifs finis

Commençons par quelques notions de géométrie projective.

Définition 3.1. — *Soit k un corps commutatif. Le plan projectif sur k, noté $\mathbf{P}^2(k)$, est l'ensemble des droites vectorielles de l'espace vectoriel k^3. Ces droites vectorielles sont appelées points de l'espace projectif et les ensembles des droites vectorielles formant un plan vectoriel sont appelés droites de l'espace projectif.*

Nous noterons P et L respectivement l'ensemble des points et des droites du plan projectif. À tout plan projectif est associé à un graphe, dit *graphe d'incidence du plan projectif*, construit de la façon suivante. Les points et les droites projectives forment les sommets du graphe et deux sommets sont reliés s'ils représentent un point et une droite le contenant. Un tel graphe est naturellement biparti. La figure 3.1 représente le graphe d'incidence du plan projectif sur $\mathbf{F}_2$, le corps à deux éléments.

Les graphes d'incidence de plans projectifs finis seront les links des 2-complexes simpliciaux que nous considérerons par la suite. Calculons donc d'emblée le spectre de leur laplacien.

Proposition 3.1. — *Soit $\mathcal{G}_q$ le graphe d'incidence d'un plan projectif sur le corps $\mathbf{F}_q$ à q éléments (où q est une puissance d'un nombre premier). Les valeurs propres du laplacien de $\mathcal{G}_q$ sont*

$$0, \quad 1-\frac{\sqrt{q}}{q+1}, \quad 1+\frac{\sqrt{q}}{q+1}, \quad 2.$$

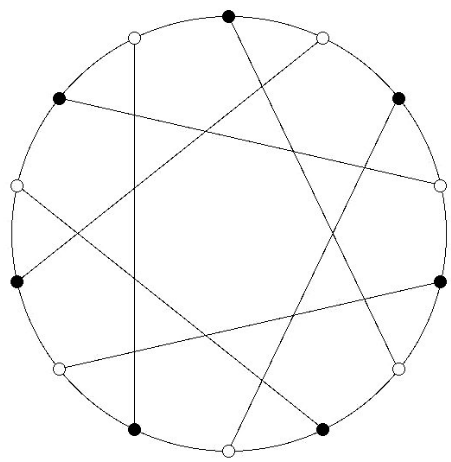


FIGURE 3.1 – Graphe d'incidence du plan projectif sur $\mathbf{F}_2$.

En particulier, les valeurs propres non nulles sont strictement plus grandes que $\frac{1}{2}$.

Démonstration. — Soient P et L les ensembles respectifs des points et des droites projectives, chacun de cardinal $n = q^2 + q + 1$. Le graphe $\mathcal{G}_q$ a donc $2n$ sommets, tous de degré $q+1$. Pour $p \in \mathrm{P}$, notons δ_p la fonction valant 1 en le sommet représentant p et 0 ailleurs et similairement pour $\ell \in \mathrm{L}$. Par symétrie, la matrice du laplacien dans la base

$$\{\delta_p | p \in \mathrm{P}\} \cup \{\delta_\ell | \ell \in \mathrm{L}\}$$

est de la forme

$$\mathrm{Id} - \frac{1}{q+1}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ \mathrm{A}^t & 0 \end{pmatrix},$$

où A est la matrice $(a_{p\ell})_{p\in \mathrm{P}, \ell \in \mathrm{L}}$ de taille $n \times n$ telle que

$$a_{p\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ appartient à } \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour calculer les valeurs propres de $\mathrm{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathrm{A} \\ \mathrm{A}^t & 0 \end{smallmatrix}\right)$, considérons la matrice

$$\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{AA}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{A}^t\mathrm{A} \end{pmatrix}.$$

Pour deux points $p, p' \in \mathrm{P}$, le coefficient (p, p') de AA^t vaut le nombre de droites passant par p et par p' et de même pour l'e coefficient (ℓ, ℓ') de $\mathrm{A}^t\mathrm{A}$ pour deux droites $\ell, \ell' \in \mathrm{L}$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\mathrm{AA}^t = \mathrm{A}^t\mathrm{A} = \begin{pmatrix} q+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & q+1 \end{pmatrix},$$

ce qui permet de voir immédiatement que les valeurs propres de $\mathrm{AA}^t = \mathrm{A}^t\mathrm{A}$ sont $(q+1)^2$ (dont un vecteur propre est donné par $(1, 1, \ldots, 1)$) et q (dont $n-1$ vecteurs propres linéairement indépendants sont donnés par $(1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(1, 0, -1, 0, \ldots, 0)$, …, $(1, 0, 0, \ldots, 0, -1)$).

Ainsi, la matrice B^2 a comme valeur propre :
- $(q+1)^2$, de multiplicité 2,
- q, de multiplicité $2(n-1)$.

Le spectre de B est donc contenu dans $\{\pm(q+1), \pm\sqrt{q}\}$. Par ailleurs, il est symétrique autour de zéro (en effet, si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des vecteurs à n coordonnées tels que $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un vecteur propre de B de valeur propre λ, alors $(\mathbf{x}, -\mathbf{y})$ est un vecteur propre de valeur propre $-\lambda$). De là, par un argument de multiplicité, nous en déduisons aisément que le spectre de B est exactement $\{\pm(q+1), \pm\sqrt{q}\}$, d'où le résultat. ∎

3.2 Immeubles triangulaires

Les immeubles sont des complexes simpliciaux possédant des propriétés de symétrie locale suffisamment fortes pour en déduire des résultats sur la structure des groupes agissant dessus. Dans cet exposé, nous nous contenterons d'une classe particulière d'immeubles.

Définition 3.2. — *Un immeuble triangulaire (ou de type $\tilde{\mathrm{A}}_2$) est un 2-complexe simplicial contractile tel que le link de tout sommet est isomorphe au graphe d'incidence d'un plan projectif fini.*

Il existe de nombreux exemples de groupes agissant sur des immeubles triangulaires (cf. [CMSZ93a, CMSZ93b], [CMS94], [Bar00], [GP01], [BP07]), nous en détaillons ici une famille classique. Soient k un corps fini et $\widehat{\mathrm{K}} = k((\mathrm{X}^{-1}))$ le corps des séries formelles de Laurent sur k d'indéterminée X^{-1} :

$$\widehat{\mathrm{K}} = k((\mathrm{X}^{-1})) = \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} a_i \mathrm{X}^{-i} \mid j \in \mathbf{Z}, a_i \in k \right\}.$$

Ce corps est muni d'une *valuation discrète* v_∞ (c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $v : \widehat{\mathrm{K}}^* \to \mathbf{Z}$ surjectif tel que $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$ pour tous x, y dans $\widehat{\mathrm{K}}^*$) définie par :

$$v_\infty\left(\sum_{i=j}^{\infty} a_i \mathrm{X}^{-i}\right) = j \qquad \text{si } a_j \neq 0.$$

En convenant que $v(0) = +\infty$, nous pouvons construire une valeur absolue ultramétrique sur $\widehat{\mathrm{K}}$ en posant :

$$|x|_\infty = q^{-v_\infty(x)},$$

où q est l'ordre de k. Enfin, nous noterons $\mathcal{O}$ l'anneau des éléments de valuation positive (autrement dit, $\mathcal{O}$ est la boule unité fermée de $\widehat{\mathrm{K}}$), c'est-à-dire $\mathcal{O} = k[[\mathrm{X}^{-1}]]$, qu'on sait être euclidien (donc principal).

Pour de plus amples détails sur toutes ces notions, nous renvoyons à la première partie de [Ser68] ou au sixième chapitre de [Bou64].

Plaçons-nous dans l'espace vectoriel $\mathrm{V} = \widehat{\mathrm{K}}^3$ sur $\widehat{\mathrm{K}}$. Nous appellerons $\mathcal{O}$-*réseau* de V tout $\mathcal{O}$-sous-module de V engendré par une $\widehat{\mathrm{K}}$-base vectorielle de V. Deux $\mathcal{O}$-réseaux Λ et Λ' seront dits *équivalents* s'ils diffèrent d'une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un élément α de $\widehat{\mathrm{K}}^*$ tel que $\Lambda = \alpha\Lambda'$.

Soit Δ_k le 2-complexe simplicial dont les sommets sont les classes d'équivalence de réseaux et dont trois classes distinctes forment un triangle s'il existe des représentants Λ_1, Λ_2 et Λ_3 de ces classes tels que

$$\mathrm{X}^{-1}\Lambda_3 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_3. \tag{3.1}$$

Par exemple, en notant $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de V, les classes d'équivalence des réseaux

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3, \\
\Lambda_2 &= \mathcal{O}e_1 + \mathrm{X}^{-1}\mathcal{O}e_2 + \mathcal{O}e_3, \\
\Lambda_3 &= \mathcal{O}e_1 + \mathrm{X}^{-1}\mathcal{O}e_2 + \mathrm{X}^{-1}\mathcal{O}e_3
\end{aligned}$$

forment un triangle car $\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1 \subset \Lambda_3 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_1$.

Proposition 3.2. — *Le* 2*-complexe simplicial* Δ_k *ainsi construit est un immeuble triangulaire dont le link en chaque sommet est isomorphe au graphe d'incidence du plan projectif* $\mathbf{P}^2(k)$.

Démonstration. — Clairement, le groupe $\mathrm{GL}_3(\widehat{\mathrm{K}})$ agit transitivement sur les $\mathcal{O}$-réseaux et cette action préserve la relation d'équivalence (car les homothéties sont dans le centre de $\mathrm{GL}_3(\widehat{\mathrm{K}})$) et celle d'incidence. Donc, $\mathrm{GL}_3(\widehat{\mathrm{K}})$ a une action simplicale sur Δ_k, transitive sur les sommets. Montrons que le link de Λ_1 est isomorphe au graphe d'incidence de $\mathbf{P}^2(k)$. Le quotient de $\mathcal{O}$ par $\mathrm{X}^{-1}\mathcal{O}$ (qui en est un idéal maximal) est isomorphe au corps k. Ainsi, $\Lambda_1/\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1$ est un k-espace vectoriel de dimension trois. À nouveau par définition de la relation d'équivalence entre les réseaux, la possibilité d'intercaler deux réseaux Λ et Λ' non équivalents entre $\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1$ et Λ_1 induit, en passant au quotient, le drapeau suivant :

$$\{0\} \subset \Lambda/\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1 \subset \Lambda'/\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1 \subset \Lambda_1/\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1.$$

Réciproquement, un drapeau dans $\Lambda_1/\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1$ de la forme

$$\{0\} \subset \mathrm{F} \subset \mathrm{G} \subset \Lambda_1/\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1$$

se relève en une suite de $\mathcal{O}$-modules

$$\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1 \subset \widetilde{\mathrm{F}} \subset \widetilde{\mathrm{G}} \subset \Lambda_1.$$

Comme $\widetilde{\mathrm{F}}$ et $\widetilde{\mathrm{G}}$ sont contenus dans Λ_1, qui est un module libre sur l'anneau principal $\mathcal{O}$, ils sont aussi libres. De plus, comme ils contiennent $\mathrm{X}^{-1}\Lambda_1$, qui engendre vectoriellement V, ils l'engendrent aussi. Ce sont donc des $\mathcal{O}$-réseaux.

Par ailleurs, un drapeau dans V correspond à un couple $(p, \ell) \in \mathrm{P} \times \mathrm{L}$ tel que $p \in \ell$. Comme une arête dont une extrêmité est Λ_1 correspond à un réseau pouvant s'insérer dans une relation de type (3.1), les points du link de Λ_1 correspondent au choix de $p \in \mathrm{P}$ ou $\ell \in \mathrm{L}$ et une adjacence entre deux points du link correspond à l'incidence d'un point et d'une droite dans le plan projectif. Autrement dit, le link d'un sommet de Δ_k est isomorphe au graphe d'incidence d'un plan projectif sur k.

Pour la démonstration du fait que Δ_k est contractile, nous renvoyons à [Ron89, chapitre 9, exercice 10, p. 128]. ■

Maintenant que nous disposons d'un immeuble, il est intéressant de faire agir des groupes dessus. Nous avons déjà vu dans la démonstration précédente que $\mathrm{GL}_3(\widehat{\mathrm{K}})$ agit transitivement sur Δ_k. Le sous-groupe $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_3(\widehat{\mathrm{K}})$ agit aussi sur cet immeuble, l'action n'est plus transitive sur les sommets mais elle l'est sur les triangles (cf. [AB08, 6.9.3, p.360]). Grâce à un théorème de Harder, ce groupe contient un réseau Γ' (au sens du théorème 1.10) cocompact et sans torsion (cf. [Mar91, théorème 3.2.4, p. 63]), ce qui implique en particulier qu'il agit librement sur Δ_k. Ainsi, grâce au critère spectral de Żuk, qui s'applique en vertu de la proposition 3.1, le groupe Γ' possède la propriété (T). En utilisant deux fois le théorème 1.10, nous en déduisons que les groupes $\mathrm{SL}_3(\widehat{\mathrm{K}})$ puis $\mathrm{SL}_3(k[\mathrm{X}])$ possèdent aussi la propriété (T).

3.3 Remarques

La famille d'exemples précédente appelle quelques commentaires. Tout d'abord, le corps $\mathrm{K} = k(\mathrm{X})$ peut être remplacé par n'importe quel corps localement compact muni d'une valuation discrète, tel le corps des rationnels muni de la valuation p-adique. Les groupes $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Q}_p)$ ont donc aussi la propriété (T).

En revanche, la valuation discrète est nécessaire dans cette construction et nous ne pouvons pas espérer montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$ est de Kazhdan *via* cette construction. En fait, un résultat profond de super-rigidité dû à G. Margulis implique que $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$ ne peut pas agir non trivialement sur un immeuble. Nous renvoyons à [Mar91] pour de plus amples détails.

Enfin, notons que ces exemples résolvent la question posée par Kazhdan concernant la finitude de la présentation des groupes ayant la propriété (T). En effet, le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_p[\mathrm{X}])$ (pour p un nombre premier), qui a la propriété (T) en vertu de la discussion précédente, n'est pas de présentation finie (cf. [Beh79]).

A

Propriété (T) et groupes linéaires spéciaux

Nous allons montrer que les groupes linéaires spéciaux $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possèdent la propriété (T) pour $n \geqslant 3$ mais que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ ne l'a pas. Ces résultats restent vrais en remplaçant $\mathbf{R}$ par n'importe quel corps local (c'est-à-dire un corps localement compact dont la topologie est non discrète et issue d'une valeur absolue). Nous admettrons pour cela un théorème qui nécessiterait trop de notions pour être démontré.

La démonstration se décompose en deux étapes : une partie algébrique étudie les représentations unitaires de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et procède par réduction, une partie plus géométrique étudie la propriété (T) pour certains sous-groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

Introduisons tout d'abord quelques notations. Soient les sous-groupes suivants de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$:

$$\mathrm{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R} \right\},$$
$$\mathrm{N}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R} \right\}$$

et

$$\mathrm{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}^* \right\}$$

Nous rappelons que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est engendré par les *matrices élémentaires*, c'est-à-dire les matrices $\mathrm{E}_{ij}(x) = \mathrm{Id}_n + x\Delta_{ij}$, où x est un réel et Δ_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en (i, j), qui vaut 1. En particulier, $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ est engendré par $\mathrm{N} \cup \mathrm{N}^-$.

Enfin, quand H est un sous-groupe d'un groupe topologique G, nous disons que la paire (G, H) a la *propriété (T) (relative)* si toute représentation unitaire de G ayant presque des vecteurs invariants admet des vecteurs H-invariants.

A.1 Propriété (T) pour la paire $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$

Nous admettrons sans démonstration le fait que la paire $(\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ (pour l'action naturelle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur le plan $\mathbf{R}^2$) a la propriété (T). Ceci se démontre en deux résultats que nous indiquons ci-dessous ; nous renvoyons à [BdlHV08] pour une démonstration complète. Nous appelons *moyenne sur un groupe localement compact* G toute mesure borélienne de probabilité, absolument continue par rapport à la mesure de Haar à gauche (cf. [BdlHV08, appendice G.1, p.421]).

Théorème A.1 (Y. Shalom, 1999). — *Soient* G *un groupe localement compact et* H *un sous-groupe distingué abélien et fermé. Si la mesure de Dirac en le caractère unité* 1_{H} *de* H *est l'unique moyenne sur* $\hat{\mathrm{H}}$ *qui soit invariante sous l'action de* G *sur* $\hat{\mathrm{H}}$ *par conjugaison, alors la paire* (G, H) *a la propriété (T).*

Démonstration. — Voir [BdlHV08, théorème 1.4.5, p. 42]. ■

Ce théorème est un résultat profond et fréquemment utilisé pour démontrer la propriété (T) relative pour une paire de groupes. Son application à la paire qui nous intéresse est en revanche un calcul élémentaire. Rappelons que le dual $\widehat{\mathbf{R}^2}$ s'identifie à $\mathbf{R}^2$ (voir [BdlHV08, corollaire D.4.6, p. 380]).

Proposition A.2. — *La mesure de Dirac en* 0 *est l'unique moyenne* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$*-invariante sur* $\mathbf{R}^2$.

Démonstration. — Voir [BdlHV08, proposition 1.4.12, p. 47]. ■

A.2 Réduction

Pour $n \geqslant 3$, nous introduisons les sous-groupes fermés de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ suivants (où les éléments de $\mathbf{R}^2$ sont vus comme des vecteurs colonnes) :

$$\mathrm{G}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{n-3} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}),\, x \in \mathbf{R}^2 \right\},$$
$$\mathrm{G}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{n-3} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Remarquons que ceux-ci sont bien sûr isomorphes respectivement à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ et à $\mathbf{R}^2$.

Pour établir la propriété (T) de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, nous aurons besoin de quelques résultats reposant tous sur le même principe : si un vecteur est invariant pour un certain sous-groupe, alors il est invariant pour un sous-groupe plus grand. La propriété (T) relative établie dans la partie précédente nous fournira un vecteur G_2-invariant qui sera *in fine* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$-invariant.

Lemme A.3. — *Soit $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels non nuls tendant vers zéro. Posons*

$$a_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & {\lambda_i}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tous $h \in \mathrm{N}$ et $h^- \in \mathrm{N}^-$, nous avons

$$\lim_i a_i h a_i^{-1} = \lim_i a_i^{-1} h^- a_i = \mathrm{Id}_2 .$$

Démonstration. — Un calcul élémentaire fournit le résultat. Par exemple, si

$$h = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$a_i h a_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i^2 x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où le résultat. ■

Lemme A.4 (Lemme de Mautner). — *Soient G un groupe topologique, $x \in \mathrm{G}$ et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de ce groupe. Supposons qu'il existe une suite $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'éléments de G tels que $\lim y_i x {y_i}^{-1} = e$. Si $\xi \in \mathcal{H}$ est fixé par y_i pour tout $i \in \mathbf{N}$, alors ξ est fixé par x.*

Démonstration. — Comme G agit par opérateurs unitaires et que $\pi(y_i)$ fixe ξ pour tout i, nous avons

$$\begin{aligned} \| \pi(x)\xi - \xi \| &= \| \pi(x)\pi(y_i)\xi - \pi(y_i)\xi \| \\ &= \| \pi(y_i^{-1})\pi(x)\pi(y_i)\xi - \xi \|. \end{aligned}$$ ■

Le dernier terme tend vers zéro car $y_i x {y_i}^{-1}$ tend vers e et π est fortement continue, donc ξ est fixé par $\pi(x)$.

Lemme A.5. — *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. Si ξ est un vecteur de $\mathcal{H}$ invariant pour N, alors ξ est invariant pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.*

Démonstration. — Il nous suffit de démontrer que ξ est invariant par A. En effet, en ce cas, les deux lemmes précédents nous indiqueront que ξ est fixé N^-, donc par tout $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ puisque ce groupe est engendré par $\mathrm{N} \cup \mathrm{N}^-$.

Soit $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ la fonction continue définie par :

$$\varphi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle.$$

Comme ξ est N-invariant et que π est unitaire, φ est N-bi-invariant, c'est-à-dire constante sur les doubles classes $\mathrm{N}g\mathrm{N}$ pour tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$.

Soient $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de réels non nuls tendant vers zéro et

$$g_i = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_i^{-1} \\ \lambda_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}).$$

Pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$, nous avons alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda\lambda_i^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_i \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}\lambda_i^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda_i & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

et donc, en posant $a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{A}$, par continuité et N-bi-invariance de φ,

$$\varphi(a) = \lim \varphi \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda_i & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \lim \varphi(g_i)$$

Le membre de droite est indépendant de a, donc φ est constante sur A. Par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons donc que $\pi(a)\xi = \xi$. ■

Soient $n \geqslant 2$ et $m < n$. En choisissant m vecteurs distincts $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$ parmi les n vecteurs de la base canonique $\{e_1, \ldots e_n\}$ de $\mathbf{R}^n$, nous avons un plongement de $\mathrm{SL}_m(\mathbf{R})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, où $\mathrm{SL}_m(\mathbf{R})$ s'identifie au sous-groupes formé des matrices laissant invariant le sous-espace vectoriel engendré par $e_{i_1}, \ldots e_{i_m}$ et fixant les autres vecteurs de la base. De tels plongements seront appelés *standard.*

Proposition A.6. — *Soit* $(\pi, \mathcal{H})$ *une représentation unitaire de* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$*. Si* ξ *est invariant pour l'action d'un quelconque des plongements standard de* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$*, alors il est invariant par* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$*.*

Démonstration. — Nous pouvons bien entendu supposer $n \geqslant 3$ et, par récurrence, nous contenter de démontrer que l'invariance par $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{R})$ pour n'importe lequel de ses plongements standard entraîne l'invariance par $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Sans perte de généralité, supposons que $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{R})$ est plongé à l'aide des $n-1$ premiers vecteurs de base. Il nous suffit alors de démontrer l'invariance sous l'action des matrices $\mathrm{E}_{in}(x)$ et $\mathrm{E}_{nj}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Choisissons à nouveau une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de réels non nuls tendant vers zéro et, pour $i < n$ fixé, choisissons une matrice diagonale $g_k \in \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ telle que $g_k(e_i) = \lambda_k$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} g_k \mathrm{E}_{in}(x) g_k^{-1} &= \mathrm{E}_{in}(\lambda_k x) \\ g_k^{-1} \mathrm{E}_{ni}(x) g_k &= \mathrm{E}_{ni}(\lambda_k x) \end{aligned}$$

et le résultat découle du lemme de Mautner. ■

A.3 Propriété (T) pour $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

Théorème A.7. — *Le groupe* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ *possède la propriété (T) pour* $n \geqslant 3$*.*

Démonstration. — Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ ayant presque des vecteurs invariants. Soient $\mathrm{G}_1 \cong \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^2$ et $\mathrm{G}_2 \cong \mathbf{R}^2$ les sous-groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ précédemment définis. Nous avons vu que la paire $(\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2)$ a la propriété (T), donc en particulier il existe un vecteur ξ non nul et G_2-invariant. Par le lemme A.5, ce vecteur est invariant pour l'action du sous-groupe de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Par la proposition A.6, ξ est donc invariant sous l'action de tout $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. ■

Étant donné que la propriété (T) est héritée par les réseaux (cf. théorème 1.10), nous avons immédiatement l'important corollaire suivant :

Corollaire A.8. — *Pour* $n \geqslant 3$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ *a la propriété (T).*

Par ailleurs, le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est isomorphe au groupe libre F_2 (cf. [dlH00, II.B.25, p. 26]) et est d'indice fini car il est d'indice fini dans le noyau de l'épimorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (cf. [Leh64, lemme VII.6C, p. 251]). En vertu du théorème 1.10, ni $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ni $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ ne peuvent avoir la propriété (T).

$\mathcal{B}$

Équivalence des groupes de cohomologie

Dans la démonstration du critère spectral de Żuk, nous avons utilisé une autre définition du premier groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(\Gamma, \pi)$ d'un groupe Γ de présentation finie à valeurs dans une représentation unitaire π. L'objet de cette annexe est d'établir l'équivalence de cette définition avec celle donnée dans la première partie.

B.1 Notations

Soient Γ un groupe dénombrable de présentation finie (engendré par un ensemble T de cardinal n et tel que $\mathrm{T} \cap \mathrm{T}^{-1} = \emptyset$) et $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ une représentation unitaire de Γ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous reprenons les notations utilisées dans la partie 2.1 : X est un 2-complexe simplicial de groupe fondamental Γ, $\widetilde{\mathrm{X}}$ est son revêtement universel, $\mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}})$ est l'ensemble des r-simplexes de $\widetilde{\mathrm{X}}$, ($r = 0, 1, 2$), munis d'une orientation Γ-invariante, et $[s : t]$ est le coefficient d'incidence entre les simplexes s et t. Nous supposerons de plus que $\widetilde{\mathrm{X}}$ est le *complexe de Cayley* de Γ (autrement dit, X a été construit en considérant un bouquet de n cercles et en y adjoignant des disques dont le bord est identifié selon les relations définissant Γ). En particulier, le 1-squelette de $\widetilde{\mathrm{X}}$ est un graphe de Cayley de Γ. Notons que ce n'est pas tout à fait le cadre du critère spectral, qui nécessitait de travailler avec de vrais complexes simpliciaux ; il est cependant bien connu que, du point de vue de l'homologie et de la cohomologie, il est indifférent de travailler avec des complexes simpliciaux ou des complexes cellulaires (cf. [Hat02, théorèmes 2.27, p. 128 et 2.35, p. 139]).

Soit $\mathrm{C}^\bullet$ le complexe de cochaînes utilisé pour le critère spectral, c'est-à-dire

$$\mathrm{C}^r = \left\{ f : \mathrm{S}^r(\widetilde{\mathrm{X}}) \to \mathcal{H} | f \text{ est } \Gamma\text{-équivariante} \right\},$$

avec l'opérateur de cobord $\mathrm{d}^r : \mathrm{C}^r \to \mathrm{C}^{r+1}$ ($r = 0, 1$) défini pour $f \in \mathrm{C}^r$ par :

$$\mathrm{d}^r f(t) = \sum_{s \in \mathrm{C}^r} [s : t] f(s).$$

Soit par ailleurs $\mathrm{D}^\bullet$ le complexe de cochaînes utilisé dans la première partie, c'est-à-dire

$$\mathrm{D}^r = \mathcal{H}^{\Gamma^r},$$

avec l'opérateur de cobord $\mathrm{d}^r : \mathrm{D}^r \to \mathrm{D}^{r+1}$ ($r = 0, 1$) défini par

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^0 \xi &: \Gamma \to \mathcal{H} : g \mapsto \pi(g)\xi - \xi, \\ \mathrm{d}^1 f &: \Gamma^2 \to \mathcal{H} : (g, h) \mapsto f(g) + \pi(g) f(h) - f(gh). \end{aligned}$$

Le but est de montrer que les deux premiers groupes de cohomologies

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{C}) = \ker \mathrm{d}^1 / \mathrm{Im}\, \mathrm{d}^0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^1(\mathrm{D}) = \ker \mathrm{d}^1 / \mathrm{Im}\, \mathrm{d}^0$$

sont isomorphes. Pour cela, nous allons définir des applications de complexes $\mathrm{F}^\bullet : \mathrm{C}^\bullet \to \mathrm{D}^\bullet$ et $\mathrm{G}^\bullet : \mathrm{D}^\bullet \to \mathrm{C}^\bullet$ telles que $\mathrm{G}^\bullet \mathrm{F}^\bullet$ égale l'identité sur $\mathrm{C}^\bullet$, ce qui impliquera en particulier que les applications induites F_* et G_* vérifient $\mathrm{G}^1_* \mathrm{F}^1_* = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^1(\mathrm{C})}$. Il suffira alors de montrer à la main que le morphisme G^1_* est injectif pour conclure. Le diagramme suivant résume la situation.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{F}^0"'] & \mathrm{C}^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{F}^1"'] & \mathrm{C}^2 \arrow[d, shift right, "\mathrm{F}^2"'] \\ \mathrm{D}^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{G}^0"'] & \mathrm{D}^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{G}^1"'] & \mathrm{D}^2 \arrow[u, shift right, "\mathrm{G}^2"'] \end{tikzcd}$$

B.2 Construction de l'application $\mathrm{G}^\bullet$

Nous cherchons à construire $\mathrm{G}^\bullet$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] & \mathrm{C}^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] & \mathrm{C}^2 \\ \mathrm{D}^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] \arrow[u, "\mathrm{G}^0"'] & \mathrm{D}^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] \arrow[u, "\mathrm{G}^1"'] & \mathrm{D}^2 \arrow[u, "\mathrm{G}^2"'] \end{tikzcd}$$

Choisissons une fois pour toute un sommet 1 de $\widetilde{\mathrm{X}}$ et nommons tous les sommets de $\widetilde{\mathrm{X}}$ de sorte à obtenir le graphe de Cayley $\mathrm{Cay}(\Gamma, \mathrm{T})$, ce qui permet d'écrire que l'action de Γ sur $\mathrm{S}^0(\widetilde{\mathrm{X}})$ est donnée par

$g \cdot h = gh$. Ceci permet aussi de nommer les arêtes sous la forme (g, gs) avec $g \in \Gamma$, $s \in \mathrm{T} \cup \mathrm{T}^{-1}$. Pour une arête e, nous noterons $o(e)$ son origine et $t(e)$ son arrivée ($o((g, gs)) = g$, $t((g, gs)) = gs$).

Par définition de l'action régulière de Γ sur son graphe de Cayley, nous avons

$$\Gamma \cdot \mathrm{V}_i = \mathrm{S}^i(\widetilde{\mathrm{X}}),$$

où $\mathrm{V}_0 = \{1\}$, V_1 est l'ensemble des arêtes dont une extrêmité est 1 et V_2 est l'ensemble des triangles dont un sommet est 1. Ainsi, une fonction Γ-équivariante de S^r dans $\mathcal{H}$ — c'est-à-dire un élément de C^r — est entièrement (et uniquement) déterminée par sa valeur sur V_r. Quitte à redéfinir si nécessaire l'orientation des arêtes de $\widetilde{\mathrm{X}}$, nous pouvons sans perdre de généralité supposer que les arêtes de V_1 sont orientées de sorte à ce que 1 en soit l'origine.

Dès lors, pour $\xi \in \mathcal{H}$, nous définissons $\mathrm{G}^0\xi$ comme étant l'unique élément de C^0 dont la valeur en 1 est ξ. Afin que le diagramme soit commutatif, nous devons alors définir G^1 en $f \in \mathrm{D}^1$ comme étant l'unique élément de C^1 dont la valeur en $e \in \mathrm{V}_1$ est $f(t(e))$. Enfin, toujours afin de rendre le diagramme commutatif, nous sommes amenés à définir G en $f \in \mathrm{D}^2$ comme étant l'unique élément de C^2 dont la valeur en un triangle orienté $[e, s, t]$ de V_2 est $f(s, s^{-1}t)$.

B.3 Construction de l'application $\mathrm{F}^\bullet$

Nous allons construire une application $\mathrm{F}^\bullet$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] \arrow[d, "\mathrm{F}^0"'] & \mathrm{C}^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] \arrow[d, "\mathrm{F}^1"'] & \mathrm{C}^2 \arrow[d, "\mathrm{F}^2"'] \\
\mathrm{D}^0 \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] & \mathrm{D}^1 \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] & \mathrm{D}^2
\end{tikzcd}$$

et telle que $\mathrm{G}^\bullet\mathrm{F}^\bullet = \mathrm{id}_{\mathrm{C}^\bullet}$.

Pour f une fonction dans C^0, nous définissons simplement $\mathrm{F}^0 f \in \mathrm{D}^0$ par l'image de f en le sommet représentant l'identité : $\mathrm{F}^0 f = f(1)$. Nous avons alors

$$(\mathrm{G}^0\mathrm{F}^0 f)(1) = \mathrm{F}^0 f = f(1),$$

ce qui montre que $\mathrm{G}^0\mathrm{F}^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{C}^0}$.

Fixons un arbre maximal $\mathcal{T}$ dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ qui contienne V_1. Pour g un élément de Γ, nous nommons γ_g le plus court chemin reliant 1 à g dans $\mathcal{T}$, c'est-à-dire une séquence d'arêtes orientées $e_1, \dots e_k$ dans $\mathcal{T}$ telle que l'origine de e_1 soit 1 et l'arrivée de e_k soit g (la lecture successive des labels des arêtes donne donc un mot du groupe libre engendré par T représentant g dans Γ).

Pour f une fonction dans C^1, nous définissons $\mathrm{F}^1 f \in \mathrm{D}^1$ comme étant la fonction qui, à g, associe l'image par f du chemin γ_g, c'est-à-dire la somme des valeurs de f en chaque arête contenue dans γ_g, somme que nous noterons simplement $f(\gamma_g)$:

$$\mathrm{F}^1 f : \Gamma \to \mathcal{H} : g \mapsto f(\gamma_g).$$

Il faut d'abord vérifier que F^1 est compatible avec F^0, autrement dit que $\mathrm{F}^1\mathrm{d}^0 = \mathrm{d}^0\mathrm{F}^0$. Pour $f \in \mathrm{C}^0$ et $g \in \Gamma$, nous avons

$$(\mathrm{d}^0\mathrm{F}^0 f)(g) = \pi(g)(\mathrm{F}^0 f) - \mathrm{F}^0 f = \pi(g)f(1) - f(1)$$

et

$$(\mathrm{F}^1\mathrm{d}^0 f)(g) = (\mathrm{d}^0 f)(\gamma_g) = f(g) - f(1),$$

et les deux expressions sont bien égales car f est Γ-équivariante. Par ailleurs, pour $e \in \mathrm{V}_1$,

$$(\mathrm{G}^1\mathrm{F}^1 f)(e) = (\mathrm{F}^1 f)(t(e)) = f(e),$$

ce qui montre que $\mathrm{G}^1\mathrm{F}^1 = \mathrm{id}_{\mathrm{C}^1}$.

À tout couple $(g,h) \in \Gamma^2$, nous associons un triangle géodésique $\triangle_{(g,h)}$ de sommets 1, g et gh et dont les côtés respectifs sont γ_g, $g \cdot \gamma_h$ et $-\gamma_{gh}$. Nous pouvons visualiser $\triangle_{(g,h)}$ comme une boucle partant de 1, se rendant en g dans $\mathcal{T}$, puis allant de g à gh comme on irait de 1 à h dans $\mathcal{T}$ et enfin revenant de gh en 1 dans $\mathcal{T}$. Ensuite, pour tout tel triangle $\triangle_{(g,h)}$, nous nous donnons un remplissage par des triangles du complexe $\widetilde{\mathrm{X}}$, en convenant que si le triangle géodésique $\triangle_{(g,h)}$ est un vrai triangle (ce qui signifie que g et gh sont adjacents à 1), alors il est son propre remplissage.

Pour f une fonction dans C^2, nous définissons $\mathrm{F}^2 f \in \mathrm{D}^2$ comme étant la fonction qui, à (g,h), associe l'image par f du triangle géodésique $\triangle_{(g,h)}$, c'est-à-dire la somme des valeurs de f en chaque triangle contenu (pour le remplissage que nous nous sommes donné) dans $\triangle_{(g,h)}$, somme que nous noterons simplement $f(\triangle_{(g,h)})$:

$$\mathrm{F}^2 f : \Gamma^2 \to \mathcal{H} : (g,h) \mapsto f(\triangle_{(g,h)}).$$

À nouveau, pour $f \in \mathrm{C}^1$ et $(g,h) \in \Gamma^2$, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^1\mathrm{F}^1 f)(g,h) &= (\mathrm{F}^1 f)(g) + \pi(g)((\mathrm{F}^1 f)(h)) - (\mathrm{F}^1 f)(gh)\\ &= f(\gamma_g) + \pi(g)(f(\gamma_h)) - f(\gamma_{gh})\end{aligned}$$

et

$$(\mathrm{F}^2\mathrm{d}^1 f)(g,h) = (\mathrm{d}^1 f)(\triangle_{(g,h)}) = f(\gamma_g) + f(g \cdot \gamma_h) - f(\gamma_{gh})$$

et les deux expressions sont bien égales car f est Γ-équivariante. Par ailleurs, pour un triangle $\triangle = [e,s,t] \in \mathrm{V}_2$, nous avons

$$(\mathrm{G}^2\mathrm{F}^2 f)(\triangle) = (\mathrm{F}^2 f)(s, s^{-1}t) = f(\triangle_{(s,s^{-1}t)})$$

et $\triangle = \triangle_{(s,s^{-1}t)}$ car (e,s), (e,t) et $(e,s^{-1}t)$ sont dans $\mathcal{T}$ par construction, ce qui montre que $\mathrm{G}^2\mathrm{F}^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{C}}^2$.

B.4 Isomorphisme entre $\mathrm{H}^1(\mathrm{C})$ et $\mathrm{H}^1(\mathrm{D})$

Nous avons construit $\mathrm{F}^\bullet$ de sorte que $\mathrm{G}^\bullet\mathrm{F}^\bullet = \mathrm{id}_{\mathrm{C}^\bullet}$, donc l'application induite en cohomologie $(\mathrm{GF})_* = \mathrm{G}_*\mathrm{F}_*$ est l'identité. En particulier, le morphisme

$$\mathrm{G}^1_* : \mathrm{H}^1(\mathrm{D}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{C}) : [f] \to [\mathrm{G}^1 f]$$

est surjectif. Montrons qu'il est également injectif.

Soit $f \in \mathrm{D}^1$ telle que $[f] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{D})$ et que $[\mathrm{G}^1 f] = 0$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{C})$. Cela signifie qu'il existe $f_0 \in \mathrm{C}^0$ tel que $\mathrm{G}^1 f = \mathrm{d}^0 f_0$. Posons $\xi = \mathrm{F}^0 f_0 = f_0(1)$ et montrons que $f = \mathrm{d}^0\xi$, ce qui impliquera que $[f] = 0$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{D})$ et donc que G^1 est injectif.

Comme $[f] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{D})$, cela signifie que $\mathrm{d}^1 f = 0$, c'est-à-dire que $\forall g, h \in \Gamma, f(gh) = f(g) + \pi(g)f(h)$. En particulier, la fonction f est déterminée par ses valeurs prises en T (l'ensemble générateur de Γ). Il nous suffit donc de montrer que

$$\forall s \in \mathrm{T}, \quad f(s) = \mathrm{d}^0\xi(s). \tag{B.1}$$

D'une part, $\mathrm{d}^0\xi(s) = \pi(s)\xi - \xi$. D'autre part, $\mathrm{G}^1 f = \mathrm{d}^0 f_0$, donc par définition de G^1, nous avons

$$\begin{aligned}\forall e \in \mathrm{V}_1, f(t(e)) &= \pi(t(e))f_0(1) - f_0(1)\\ &= \pi(t(e))\xi - \xi\\ &= \mathrm{d}^0\xi(t(e)).\end{aligned}$$

Par définition de V_1, l'égalité (B.1) est donc vérifiée pour tout élément de T. Ainsi, G^1_* est un isomorphisme, ce qui montre que les deux définitions que nous avons utilisées pour le premier groupe de cohomologie d'un groupe à valeurs dans une représentation unitaire sont bien équivalentes.

Bibliographie

[AB08] P. Abramenko & K. S. Brown – *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008, Theory and applications.

[Bar00] S. Barré – « Immeubles de Tits triangulaires exotiques », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **9** (2000), no. 4, p. 575–603.

[BdlHV08] B. Bekka, P. de la Harpe & A. Valette – *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Beh79] H. Behr – « $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_q[t])$ is not finitely presentable », in *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979, p. 213–224.

[Bou63] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI : Intégration. Chapitre 7 : Mesure de Haar. Chapitre 8 Convolution et représentations*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1306, Hermann, Paris, 1963.

[Bou64] — , *Éléments de mathématique. Fascicule XXX. Livre VII : Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308, Hermann, Paris, 1964.

[BP07] S. Barré & M. Pichot – « Sur les immeubles triangulaires et leurs automorphismes », *Geom. Dedicata* **130** (2007), p. 71–91.

[Bro89] K. S. Brown – *Buildings*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[CMS94] D. I. Cartwright, W. Młotkowski & T. Steger – « Property (T) and $\tilde{\mathrm{A}}_2$ groups », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **44** (1994), no. 1, p. 213–248.

[CMSZ93a] D. I. Cartwright, A. M. Mantero, T. Steger & A. Zappa – « Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{\mathrm{A}}_2$. I », *Geom. Dedicata* **47** (1993), no. 2, p. 143–166.

[CMSZ93b] — , « Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{\mathrm{A}}_2$. II. The cases $q = 2$ and $q = 3$ », *Geom. Dedicata* **47** (1993), no. 2, p. 167–223.

[dlH00] P. de la Harpe – *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[GP01] D. Gaboriau & F. Paulin – « Sur les immeubles hyperboliques », *Geom. Dedicata* **88** (2001), p. 153–197.

[Hat02] A. Hatcher – *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Kaž67] D. A. Každan – « On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **1** (1967), p. 71–74.

[Leh64] J. Lehner – *Discontinuous groups and automorphic functions*, Mathematical Surveys, No. VIII, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[Mar91] G. A. Margulis – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Ron89] M. Ronan – *Lectures on buildings*, Perspectives in Mathematics, vol. 7, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[Ser68] J.-P. Serre – *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Quatrième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[Sha00] Y. Shalom – « Rigidity of commensurators and irreducible lattices », *Invent. Math.* **141** (2000), p. 1–54.

[Wei40] A. Weil – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Actual. Sci. Ind., no. 869, Hermann et Cie., Paris, 1940.

[Wei03] R. M. Weiss – *The structure of spherical buildings*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[Wei09] — , *The structure of affine buildings*, Annals of Mathematics Studies, vol. 168, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[Żuk96] A. Żuk – « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), p. 453–458.

Table des matières