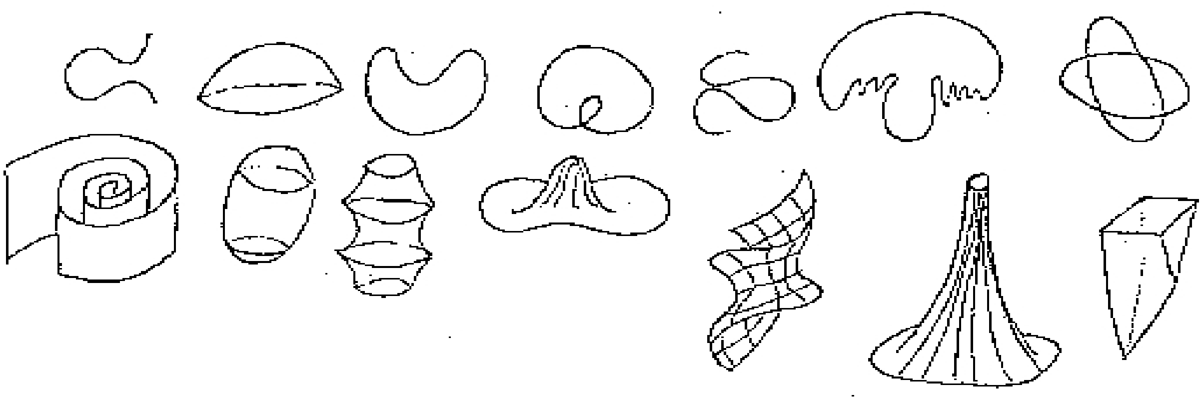
Géométrie Différentielle, TD 1 du 17 février 2012

1. Exemples et contre-exemples de sous-variétés

Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dire, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés C^∞.



Solution :

Les parties de $\mathbb{R}^2$ sont toutes des sous-variétés C^∞ à l'exception de la seconde, de la quatrième et de la septième de la première ligne, qui présentent des recoupements.

Pour les parties de $\mathbb{R}^3$, la troisième et la dernière de la deuxième ligne ne sont pas des sous-variétés C^∞, car elles ont des coins. Pour les autres, la réponse dépend ou non de l'inclusion du bord dans ces parties : si on n'inclut pas le bord, ce sont bien des sous-variétés C^∞, tandis que si on inclut le bord, ce ne sont pas des sous-variétés C^∞.

2. Sphère et tore

1– Soit $n \geqslant 1$. Montrer que la sphère unité est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Soit $0 < \rho < r$. Montrer que

$$T = \{((r + \rho\cos(\theta))\cos(\varphi), (r + \rho\cos(\theta))\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)), (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1– Posons $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1$, de sorte que la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ est $F^{-1}(0)$. Il suffit de vérifier que F est une submersion au voisinage de $\mathbb{S}^{n-1}$. On calcule

$dF_{(x_1,\ldots,x_n)}(h_1,\ldots,h_n) = x_1h_1 + \cdots + x_nh_n$ de sorte que dF est nulle seulement en l'origine. En particulier, dF est non nulle, donc surjective en tout point de $\mathbb{S}^{n-1}$.

2– On pose $G(\theta,\varphi) = ((r+\rho\cos(\theta))\cos(\varphi),(r+\rho\cos(\theta))\sin(\varphi),\rho\sin(\theta))$. Un calcul direct de la différentielle de G montre que G est immersive.

Soit $P = G(\theta,\varphi) \in T$. Par théorème de forme normale des immersions, pour ε assez petit, si $U = B((\theta,\varphi),\varepsilon)$, $G : U \to G(U)$ est un homéomorphisme.

Notons $K = ([\theta-\pi,\theta+\pi]\times[\varphi-\pi,\varphi+\pi])\setminus U$. C'est un compact. Son image par G est donc fermée. On note W l'ouvert complémentaire. Le fait que $G(\theta,\varphi) = G(\theta',\varphi')$ si et seulement si $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ et $\varphi \equiv \varphi'[2\pi]$ montre que $T\cap W = G(U)$. On a donc construit un voisinage W de P et une immersion $G : U \to W$ qui réalise un homéomorphisme $G : U \to T\cap W$, comme voulu.

3. Lignes de niveau

Montrer que les lignes de niveau de la fonction suivante :

$$F(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2+(1-x^2-y^2)^2}$$

sont des sous-variétés C^∞ de $\mathbb{R}^3$. Préciser leurs dimensions. Faire un dessin.

Solution :

On remarque avant tout que F est bien C^∞, que son dénominateur ne s'annule jamais et qu'elle prend ses valeurs entre 0 et 1.

La ligne de niveau $\{F = 0\}$ est la droite $x = y = 0$ et la ligne de niveau $\{F = 1\}$ est le cercle $\{z = x^2+y^2-1 = 0\}$. Ces deux lignes de niveau sont des sous-variétés de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Pour la droite $x = y = 0$, cela résulte immédiatement de la définition d'une sous-variété. Pour le cercle, on considère les deux équations z et x^2+y^2-1 de celui-ci. Leurs gradients $(0,0,1)$ et $(2x,2y,0)$ ne sont liés qu'en un point où $x = y = 0$. Ils sont donc indépendants sur le cercle. On peut alors appliquer le théorème des submersions pour conclure.

Montrons qu'hors de ces deux lignes de niveau, F est submersive. Cela montrera, par le théorème des submersions, que les autres lignes de niveau de F sont des sous-variétés de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Par calcul direct, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ exactement quand $z = 0$ ou $x = y = 0$. Toujours par calcul immédiat, en un point où $z = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ exactement quand $x = 0$ ou $x^2+y^2 = 1$. Symétriquement, en un point où $z = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ exactement quand $y = 0$ ou $x^2+y^2 = 1$. De ces calculs on voit que F est submersive hors de la droite $x = y = 0$ et du cercle $z = x^2+y^2-1 = 0$, ce qu'on voulait.

4. Un angle n'est pas une sous-variété

1– Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \geqslant 0, \text{ ou } x \geqslant 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. On pourra raisonner par l'absurde, et obtenir une contradiction en utilisant le théorème des fonctions implicites.

2– Donner cependant un exemple d'application C^∞ injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image A.

Solution :

1– Supposons par l'absurde que A soit une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Comme A n'est pas un ouvert et n'est pas constitué de points isolés, c'est nécessairement une sous-variété de dimension 1.

Dans un voisinage U de l'origine, on peut donc écrire $A = \{F = 0\}$ où $F : U \to \mathbb{R}$ est une submersion. Comme dF_0 est non nulle, $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ ne peuvent être tous deux nuls. On peut supposer, par symétrie, que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites. Celui-ci montre en particulier que, quitte à restreindre U, la projection de $U \cap A$ sur l'axe des abscisses est injective.

C'est absurde car les points $(0, \varepsilon)$ pour $\varepsilon \geqslant 0$ ont tous même image par cette projection.

2– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x) = (e^{-1/x}, 0)$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = (0, e^{-1/x})$ si $x < 0$. On montre aisément que cette application est C^∞ injective, et d'image A, comme voulu.

5. Sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$

Soient $0 \leqslant r \leqslant n$ des entiers, avec $n \geqslant 2$.

1– Montrer que $\det : A \mapsto \det(A)$ est C^∞ sur $M_n(\mathbb{R})$, et caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de det est non nulle.

2– En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété C^∞ de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer de même que l'ensemble des matrices de rang $n - 1$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

3– Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que, si $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$, alors la matrice $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

4– Soit $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de rang r. Montrer que c'est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa codimension.

5– Montrer que les matrices symétriques de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Calculer sa codimension.

6– Montrer que les projecteurs orthogonaux de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques, de dimension $r(n - r)$.

7– Montrer que les matrices de rang $\leqslant n-1$ ne forment pas une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. On pourra par exemple considérer ce qui se passe en 0.

Solution :

1– L'application det est polynomiale, donc C^∞.

Notons $a_1, \ldots, a_n$ les colonnes de la matrice A. En utilisant la multilinéarité du déterminant, on vérifie que

$$\det(A+H) = \det(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) + O(\|H\|^2).$$

Ainsi, la différentielle du déterminant est donnée par

$$d(\det)_A(H) = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Supposons que $d(\det)_A = 0$. Choisissons pour H une matrice élémentaire $E_{k,l}$ avec des 0 partout sauf un 1 en position (k,l). L'équation $d(\det)_A(H) = 0$ montre que le mineur de taille $n-1$ de A obtenu en supprimant la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne de A est nul. Ainsi, $d(\det)_A = 0$ si et seulement si tous les mineurs de taille $n-1$ de A sont nuls, i.e., si et seulement si le rang de A est $< n-1$.

2– Soit $X = SL_n(\mathbb{R})$. La fonction $\Phi : A \mapsto \det(A) - 1$ est une submersion en tout point de X, et X s'écrit localement comme $\Phi^{-1}(0)$. La caractérisation des sous-variétés comme surfaces de niveau locales de submersions montre donc que X est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

L'argument est le même pour l'ensemble Y des matrices de rang $n-1$. On utilise alors la fonction $\Phi : A \mapsto \det(A)$. Il faut utiliser de plus que, si $A \in Y$, il existe un voisinage U de A tel que $Y \cap U = \{\Phi^{-1}(0)\} \cap U$, ce qui découle de la semi-continuité du rang d'une matrice.

3– On choisit un voisinage de 0 sur lequel $I_r + A$ est inversible. Alors, comme son mineur $r \times r$ supérieur gauche est non nul, les r premières colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ sont indépendantes.

Par conséquent, cette matrice est de rang r si et seulement si les $n-r$ autres colonnes sont combinaisons linéaires des r premières si et seulement si il existe une matrice M de taille $r \times (n-r)$ telle que $C = (I_r + A)M$ et $D = BM$ si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

4– Soit $X \in V_r$. Il existe des matrices inversibles P et Q telles que $PXQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: I_{r,0}$. Si on savait que V_r était une sous-variété au voisinage de $I_{r,0}$, on en déduirait donc le même résultat au voisinage de X puisque le difféomorphisme $\Psi : Y \mapsto PYQ$ laisse V_r invariant.

Il suffit donc de travailler au voisinage de $I_{r,0}$. Soit

$$\Phi : \begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto D - B(I_r + A)^{-1}C \tag{1}$$

définie au voisinage de $I_{r,0}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Sa différentielle est surjective en $I_{r,0}$ car elle est donnée par $d\Phi_{I_{r,0}} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = D$. Ainsi, le théorème des submersions s'applique et montre que $\Phi^{-1}(0)$ est une sous-variété au voisinage de $I_{r,0}$. La question précédente montre de plus qu'elle coïncide avec V_r au voisinage de $I_{r,0}$, ce qui conclut. Sa codimension est $\dim \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) = (n-r)^2$.

5– Lorsque $p + q = r$, notons $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ et $I_{p,q,0} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Toute matrice symétrique s'écrit sous la forme ${}^tPI_{p,q,0}P$ pour une certaine matrice P, et il suffit donc comme dans le cas précédent de montrer que les matrices symétriques de rang r forment une sous-variété au voisinage de $I_{p,q,0}$.

Comme plus haut, une matrice symétrique $\begin{pmatrix} I_{p,q} + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ proche de $I_{p,q,0}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_{p,q} + A)^{-1}{}^tB$. On considère donc une application Φ comme en (1). Sa différentielle est encore surjective (cette fois sur l'espace des matrices symétriques), donc on conclut comme plus haut. Ici, la codimension est la dimension des matrices symétriques de taille $n - r$, i.e. $\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$.

6– Comme plus haut, on se ramène au voisinage de $I_{r,0}$. Soit $M = \begin{pmatrix} I_r + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ une matrice symétrique proche de $I_{r,0}$. Elle est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}{}^tB$. En ce cas, la matrice $M^2 - M$ est égale à

$$\begin{pmatrix} A + A^2 + {}^tBB & A{}^tB + {}^tBB(I_r + A)^{-1}{}^tB \\ BA + B(I_r + A)^{-1}{}^tBB & B{}^tB + B(I_r + A)^{-1}{}^tBB(I_r + A)^{-1}{}^tB - B(I_r + A)^{-1}{}^tB \end{pmatrix}.$$

La matrice M est un projecteur si et seulement si cette matrice est nulle, ce qui équivaut à $A + A^2 + {}^tBB = 0$, i.e. ${}^tBB = -A(I_r + A)$: on vérifie en effet que cette condition implique que les quatre cases de la matrice écrite ci-dessus sont nulles.

On définit donc une application

$$\Phi : \begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto (D - B(I_r + A)^{-1}{}^tB, A + A^2 + {}^tBB).$$

Une matrice M proche de $I_{r,0}$ est un projecteur orthogonal de rang r si et seulement si $\Phi(M) = 0$. De plus, $d\Phi_{I_{r,0}}$ est surjective. On conclut donc comme plus haut.

7– Soit X l'ensemble des matrices de rang au plus $n - 1$. Supposons que X soit une sous-variété. Sur un voisinage V de 0, il existe un paramétrage local f de X, i.e., il existe une application f de classe C^1 définie sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^k$ (avec $k \leqslant n^2$) qui est une immersion et un homéomorphisme sur son image, avec $f(0) = 0$ et $f(U) = X \cap V$.

Comme $n \geqslant 2$, la matrice $E_{k,l}$ appartient à X. Pour t assez petit, il existe donc un élément $e_{k,l}(t)$ de U tel que $f(e_{k,l}(t)) = tE_{k,l}$. Comme f est un homéomorphisme sur son image, $e_{k,l}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. La suite $\frac{e_{k,l}(1/p)}{\|e_{k,l}(1/p)\|}$ appartient à la sphère unité compacte de $\mathbb{R}^k$, on peut donc supposer qu'elle converge vers un vecteur $v_{k,l}$ de norme 1. Alors

$$df_0(v_{k,l}) = \lim \frac{f(e_{k,l}(1/p))}{\|e_{k,l}(1/p)\|}.$$

Comme $f(e_{k,l}(1/p))$ est proportionnel à la matrice $E_{k,l}$, on obtient en passant à la limite que $df_0(v_{k,l}) = \lambda E_{k,l}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme df_0 est injective, $\lambda \neq 0$. Ainsi, l'image de l'application linéaire df_0 contient toutes les matrices $E_{k,l}$, elle est donc surjective. En particulier, $k = n^2$. Le théorème d'inversion locale assure alors que X contient un voisinage de 0, ce qui est absurde.

6. Application C^1 injective

Considérons une application f de classe C^1 de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est injective.

1– Montrer que la différentielle de f est de rang m sur un ouvert dense de $\mathbb{R}^m$.

2– En déduire que $m \leqslant n$.

3– La différentielle de f est-elle nécessairement de rang m partout ?

Solution :

1– On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ sur lequel la différentielle de f est de rang inférieur à m, et qu'en un certain point $a \in U$ le rang atteint son maximum sur U, noté r. Alors, par semi-continuité du rang, sur un ouvert $V \subset U$ contenant a, df est de rang $\geqslant r$. Par maximalité, sur tout V, df est de rang r. Alors, d'après le théorème du rang, et quitte à changer de coordonnées, on écrit pour $a + x \in V$: $f(a + x) = f(a) + (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots 0)$. Mais alors f n'est pas injective.

2– La différentielle de f est de rang m en un point ; on a donc nécessairement $n \geqslant m$.

3– Non : considérer la fonction $x \to x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

7. Lemme de Morse

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $f(0) = 0$, et $df_0 = 0$. On suppose que $d^2 f_0$ (qui est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$) est non dégénérée, de signature (p, q).

On va montrer le lemme de Morse : au voisinage de l'origine, après changement de coordonnées, f s'écrit $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$.

1– Montrer l'existence de fonctions $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de classe C^2 telles que $f(x) = \sum x_i g_i(x)$.

2– Montrer l'existence de fonctions $(h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de classe C^1 telles que $f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}(x)$ et $h_{ij} = h_{ji}$. Autrement dit, en notant $A(x) = (h_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $f(x) = \langle A(x)x, x\rangle$ (et $A(0) = \frac{1}{2}d^2 f_0$).

3– Soient E l'espace des matrices carrées de taille n, et F l'espace des matrices symétriques de taille n. Soit $Q \in F$ non dégénérée. En considérant $\xi : \begin{cases} E & \to & F \\ A & \mapsto & {}^t AQA \end{cases}$, montrer l'existence d'une application φ C^∞ définie sur un voisinage U de Q dans F et à valeurs dans E telle que $\varphi(Q) = \mathrm{Id}$ et, pour tout $q \in U$, ${}^t\varphi(q)Q\varphi(q) = q$.

4– Construire un changement de coordonnées local au voisinage de 0 tel que, après changement de coordonnées, f s'écrive $f(x_1,\dots,x_n) = \langle \frac{1}{2}d^2 f_0 x, x\rangle$.

5– Conclure.

Solution :

1– Cela résulte de

$$f(x) - f(0) = \int_{t=0}^1 df_{tx}(x)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n x_i \left(\int_{t=0}^1 df_{tx}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\,\mathrm{d}t\right)$$

par linéarité de la différentielle.

On conclut en posant $g_i(x) = \int_{t=0}^1 df_{tx}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\,\mathrm{d}t$.

2– Comme $df_0 = 0$, on a $g_i(0) = 0$, si bien qu'on peut appliquer le même procédé aux g_i. On obtient une expression de la forme $f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}(x)$ avec les h_{ij} C^2. On symétrise alors en remplaçant h_{ij} et h_{ji} par $\frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, ce qui conclut (pour vérifier que $(h_{ij}(0)) = \frac{1}{2}d^2 f_0$, il suffit de dériver deux fois).

3– Montrons que $d\xi(I_n)$ est surjective. On a $d\xi(I_n).(a) = {}^t aQ + Qa$. Si $q \in F$, on a donc $d\xi(I_n).(Q^{-1}q/2) = q$, ce qui conclut. Le théorème des submersions donne une application φ définie au voisinage de Q, avec $\varphi(Q) = I_n$, et telle que $\xi \circ \varphi = \mathrm{Id}$, i.e. ${}^t\varphi(q)Q\varphi(q) = q$.

4– Notons $H(x) = (h_{ij}(x))$, avec $H(0) = Q := \frac{1}{2}d^2 f_0$. Posons $\psi(x) = \varphi(H(x))x$: on a alors

$$f(x) = {}^t x H(x) x = {}^t x\, {}^t\varphi(H(x))Q\varphi(H(x))x = {}^t\psi(x)Q\psi(x).$$

Comme $\psi(0) = 0$ et $d\psi_0 = \varphi(H(0)) = \mathrm{Id}$, ψ est bien un difféomorphisme local, et $f \circ \psi^{-1}(x)$ s'écrit comme $\langle \frac{1}{2}d^2 f_0 x, x\rangle$.

5– On sait, par classification des formes quadratiques réelles, qu'on peut écrire $\frac{1}{2}d^2f_0 = {}^tPI_{p,q}P$ pour une certaine matrice orthogonale P. Effectuons un changement de variable linéaire supplémentaire : $f \circ \psi^{-1} \circ P^{-1}(x) = \langle I_{p,q}x, x\rangle$. Cela conclut.