

Géométrie Différentielle, TD 10 du 11 mai 2012

1. Redressement des champs de vecteurs

Si $1 \leq i \leq n$, on note ∂_i le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n constant de valeur le i -ème vecteur e_i de la base canonique.

- 1- Soit X un champ de vecteurs C^∞ défini sur un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^n . On suppose que $X(0) = e_1$. Notons φ_t le flot local de X . Montrer que l'application $F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine.
- 2- Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer G_*X .
- 3- Soit M une variété C^∞ , X un champ de vecteurs C^∞ sur M , et $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage U de x dans M et un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\psi_*X|_U = \partial_1|_V$.

Solution :

- 1- On calcule sa différentielle en l'origine : c'est l'identité. Elle est donc inversible, et le théorème d'inversion locale assure que F est un difféomorphisme local.
- 2- Calculons $F_*\partial_1$. On a $d_{(x_1, \dots, x_n)}F(\partial_1) = X(F(x_1, \dots, x_n))$, de sorte que $F_*\partial_1 = X$. Comme G est un inverse local de F , $G_*X = \partial_1$.
- 3- Comme le problème est local, on peut supposer que M est un ouvert de \mathbb{R}^n , et que x en est l'origine. Comme $X(x)$ est non nul, on peut, quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, supposer que $X(x) = e_1$. Quitte à restreindre notre ouvert, l'application $\psi = G$ considérée à la seconde question est bien définie et convient.

2. Transitivité des difféomorphismes

- 1- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|, \|y\| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de \mathbb{R}^n tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $\|z\| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.
- 2- Soit M une variété C^∞ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.
- 3- Soit M une variété C^∞ connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M .
- 4- Soit M une variété C^∞ connexe de dimension ≥ 2 , et soit $k \geq 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k -transitivement sur M : si $x_1, \dots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq k$.

Solution :

- 1– Considérons le champ de vecteurs X constant égal à $y - x$. Soit ρ tel que $\|x\|, \|y\| < \rho < r$ et notons $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction plateau égale à 1 sur $B(0, \rho)$ et égale à 0 hors de $B(0, r)$. Posons $Y = fX$. Le flot de Y est défini pour tout temps, par le théorème des bouts. En effet, hors de $B(0, r)$, il est constant, de sorte qu'il ne peut sortir de tout compact.

Notons φ le flot de Y au temps 1. Il vérifie les propriétés voulues.

- 2– On choisit un voisinage U de x difféomorphe à \mathbb{R}^n ; on l'identifie à \mathbb{R}^n de sorte que x en soit l'origine. On pose V la boule unité ouverte dans U . Montrons que V convient. Soit $y \in V$. Par la question précédente, on trouve un difféomorphisme φ de U envoyant x sur y , et qui peut se prolonger en un difféomorphisme de M en posant $\varphi(z) = z$ pour $z \notin U$.

- 3– La question précédente montre que les orbites de l'action du groupe des difféomorphismes sont ouvertes. Comme M est connexe, et partitionnée en orbites, il ne peut y avoir qu'une orbite, égale à M tout entier.

- 4– On raisonne par récurrence sur k . Pour $k = 1$, c'est le résultat ci-dessus. Si c'est vrai pour $k - 1$, on considère un difféomorphisme ψ envoyant x_i sur y_i pour $1 \leq i \leq k - 1$. Posons $x = \psi(x_k)$. On va construire un difféomorphisme ψ' tel que $\psi'(y_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq k - 1$ et $\psi'(x) = y_k$. On pourra alors poser $\varphi = \psi' \circ \psi$.

On considère pour cela l'action sur M du groupe des difféomorphismes fixant y_1, \dots, y_{k-1} . En raisonnant comme dans les questions précédentes (et en particulier en exploitant la connexité de $M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, vraie car $\dim(M) \geq 2$), on montre qu'il agit transitivement sur $M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, ce qui conclut.

3. Classification des variétés de dimension 1

Soit M une variété connexe C^∞ de dimension 1. On va montrer que M est difféomorphe à \mathbb{R} ou à \mathbb{S}^1 .

- 1– Supposons dans un premier temps que M est orientable. Montrer qu'il existe sur M un champ de vecteurs ξ ne s'annulant pas.
- 2– Soit $x_0 \in M$ et notons φ_t le flot de ξ . On note $f : t \mapsto \varphi_t(x_0)$ définie sur un intervalle ouvert maximal I . Montrer que f est une immersion surjective.
- 3– Si f est injective, montrer que f est un difféomorphisme entre I et M .
- 4– Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M .
- 5– Supposons à présent que M n'est pas orientable. On admet (ou on démontre : voir l'exercice 2 du TD 9) que M est le quotient par une action sans point fixe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une variété \widetilde{M} connexe et orientable. Obtenir une contradiction.

Solution :

- 1– Fixons une orientation de M . Écrivons M comme réunion localement finie d'ouverts de cartes connexes U_i : ce sont des intervalles. Soit (φ_i) une partition de l'unité adaptée aux U_i et ξ_i un champ de vecteurs sur U_i proportionnel à l'orientation et ne s'annulant pas. Alors $\xi = \sum_i \varphi_i \xi_i$ convient.
- 2– La différentielle de f est donnée par $T_t f(\frac{\partial}{\partial t}) = X(f(t)) \neq 0$. Ainsi, f est immersive, donc un difféomorphisme local, et son image est ouverte. Montrons qu'elle est également fermée. Soit $y \in \overline{f(I)}$. L'application $g : t \mapsto \varphi_t(y)$ est définie sur un voisinage $] -\varepsilon; \varepsilon[$ de 0 dans \mathbb{R} . Son image $g(] -\varepsilon; \varepsilon[)$ est donc un voisinage de y et rencontre ainsi $f(I)$. Il existe alors $s \in] -\varepsilon; \varepsilon[$ et $t \in I$ tels que $\varphi_s(y) = \varphi_t(x_0)$. Alors $y = \varphi_{t-s}(x_0)$ appartient à I .
Par connexité de M , f est donc surjective.
- 3– Si f est injective, c'est un difféomorphisme local bijectif, donc un difféomorphisme entre I et M .
- 4– Supposons qu'il existe deux points t et $t+s$ dans I avec $s > 0$ tels que $f(t) = f(t+s)$. Alors les propriétés de transitivité du flot montrent que $I = I + s$, ce qui implique $I = \mathbb{R}$. De plus $\{s \in \mathbb{R} | \varphi_s(x_0) = x_0\}$ est un sous-groupe fermé de \mathbb{R} non nul et non égal à \mathbb{R} (car f est un difféomorphisme local en x_0). Par conséquent, il est de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t+r) = f(t)$, de sorte que f induit $\tilde{f} : \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \rightarrow M$. Comme f est une immersion, \tilde{f} est une immersion. Par définition de r , elle est injective. Comme elle est également surjective, \tilde{f} est un difféomorphisme.
- 5– La variété \widetilde{M} est connexe orientable de dimension 1, donc isomorphe, par les questions précédentes à \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 . De plus, l'action de $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une involution sans point fixe de \widetilde{M} qui renverse l'orientation. Or le théorème des valeurs intermédiaires montre que ni \mathbb{R} ni \mathbb{S}^1 ne possèdent un tel automorphisme. C'est absurde.

4. Flots de champs de vecteurs colinéaires

Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur une variété M .

- 1– Soit f une fonction C^∞ sur M . Décrire le flot local de fX en un point x_0 de M en fonction du flot local de X en ce point. Obtenir en particulier une estimation sur le temps pour lequel le flot local de fX est défini.
- 2– Montrer qu'il existe une application $f C^\infty$ partout strictement positive telle que fX est complet.

Solution :

- 1– Soit $\varepsilon > 0$ et U un voisinage de x_0 dans M tels que le flot local $\varphi_t(x)$ de X au voisinage de x_0 soit défini pour $(t, x) \in [-\varepsilon; \varepsilon] \times U$. Quitte à rétrécir U et à diminuer

ε , on peut supposer que $\varphi_t(x)$ prend ses valeurs dans un compact. La fonction $|f|$ y est bornée par une constante C .

L'idée est de chercher le flot local de fX sous la forme $\varphi_{\gamma(t,x)}(x)$. L'équation que doit vérifier γ est

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \gamma(t, x) &= f(\varphi_{\gamma(s,x)}(x)) \\ \gamma(0, x) &= 0 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in U$, cette équation a une solution (par Cauchy-Lipschitz) définie sur $[-\varepsilon/C; \varepsilon/C]$ (on voit cela à l'aide du théorème des bouts). Par dépendance en les paramètres des solutions d'une équation différentielle, on obtient une solution C^∞ $\gamma(t, x)$ définie sur $[-\varepsilon/C; \varepsilon/C] \times U$. C'est alors un calcul immédiat de vérifier que $\psi_t(x) = \varphi_{\gamma(t,x)}(x)$, définie sur $[-\varepsilon/C; \varepsilon/C] \times U$ est le flot de fX au voisinage de x_0 .

- 2– Soit U_n une suite croissante d'ouverts d'adhérence compacte telle que $\overline{U_n}$ soit inclus dans U_{n+1} et $\bigcup U_n = M$. Comme $\overline{U_n}$ est compact, le flot de X est défini sur un temps $\varepsilon_n > 0$ sur U_n . Quitte à réduire ε_n , on peut même imposer que les orbites partant de U_n restent dans U_{n+1} pendant un temps au moins ε_n .

Si $f \leq \varepsilon_n$ sur U_{n+1} , on déduit du calcul de la question précédente que les orbites de fX partant d'un point de U_n sont définies pour un temps au moins 1, et restent dans U_{n+1} pendant ce temps. Il suffit donc de choisir une fonction f telle que, pour tout n , $f \leq \varepsilon_n$ sur chaque $U_{n+1} \setminus U_n$ pour conclure.

Pour cela, soit $V_n = U_{n+1} \setminus U_n^-$. C'est un recouvrement ouvert de M ; on note φ_n une partition de l'unité adaptée. On peut alors prendre $f = \sum_n \varphi_n \min(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$.

5. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \rightarrow N$ une submersion surjective entre variétés C^∞ de dimensions respectives m et n .

- 1– Montrer que pour tout champ de vecteurs C^∞ Y sur N , il existe un champ de vecteurs C^∞ X sur M tel que

$$\forall x \in M, T_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y . En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

- 2– Soit $y_0 \in N$ et (e_1, \dots, e_n) une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs C^∞ Y_1, \dots, Y_n sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i , montrer que l'application

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \dots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n sur un voisinage de y_0 dans N .

- 3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un C^∞ -difféomorphisme $\psi : U \times F \rightarrow f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.

Solution :

Voir la correction de l'exercice 88 dans le polycopié de F. Paulin.