Géométrie Différentielle, TD 10 du 11 mai 2012

1. Redressement des champs de vecteurs

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, on note ∂_i le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ constant de valeur le i-ème vecteur e_i de la base canonique.

1– Soit X un champ de vecteurs C^∞ défini sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $X(0) = e_1$. Notons φ_t le flot local de X. Montrer que l'application $F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine.

2– Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer $G_* X$.

3– Soit M une variété C^∞, X un champ de vecteurs C^∞ sur M, et $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage U de x dans M et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi_* X|_U = \partial_1|_V$.

2. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une variété C^∞ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une variété C^∞ connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une variété C^∞ connexe de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \ldots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \ldots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

3. Classification des variétés de dimension 1

Soit M une variété connexe C^∞ de dimension 1. On va montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$.

1– Supposons dans un premier temps que M est orientable. Montrer qu'il existe sur M un champ de vecteurs ξ ne s'annulant pas.

2– Soit $x_0 \in M$ et notons φ_t le flot de ξ. On note $f : t \mapsto \varphi_t(x_0)$ définie sur un intervalle ouvert maximal I. Montrer que f est une immersion surjective.

3– Si f est injective, montrer que f est un difféomorphisme entre I et M.

4– Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M.

5– Supposons à présent que M n'est pas orientable. On admet (ou on démontre : voir l'exercice 2 du TD 9) que M est le quotient par une action sans point fixe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une variété $\widetilde{M}$ connexe et orientable. Obtenir une contradiction.

4. Flots de champs de vecteurs colinéaires

Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur une variété M.

1– Soit f une fonction C^∞ sur M. Décrire le flot local de fX en un point x_0 de M en fonction du flot local de X en ce point. Obtenir en particulier une estimation sur le temps pour lequel le flot local de fX est défini.

2– Montrer qu'il existe une application f C^∞ partout strictement positive telle que fX est complet.

5. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \to N$ une submersion surjective entre variétés C^∞ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que pour tout champ de vecteurs C^∞ Y sur N, il existe un champ de vecteurs C^∞ X sur M tel que

$$\forall x \in M, T_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y. En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

2– Soit $y_0 \in N$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs C^∞ $Y_1, \ldots, Y_n$ sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrer que l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \ldots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de y_0 dans N.

3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un C^∞-difféomorphisme $\psi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.