**Géométrie Différentielle, TD 11 du 25 mai 2012**

## 1. Boule qui roule

On considère une boule posée sur un plan horizontal. L'ensemble des positions possibles de cette boule s'identifie à $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$. En shootant (légèrement) dans la boule, on la fait rouler sans qu'elle glisse.

1– Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.

2– Montrer qu'on peut ainsi faire prendre à la boule toute position choisie à l'avance.

**Solution :**

1– On part de la position $(x, y, M)$. Lorsqu'on fait rouler à vitesse constante la boule autour de l'axe $e_2$, le mouvement est $t \mapsto (x + t, y, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} M)$. Le vecteur tangent au mouvement est donc $X(x, y, M) = (1, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M)$.

De même, si l'on fait rouler la boule autour de l'axe $e_1$, le vecteur tangent au mouvement est $Y(x, y, M) = (0, 1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M)$.

Le champ de 2-plans recherché est celui engendré en $(x, y, M)$ par $X(x, y, M)$ et $Y(x, y, M)$.

2– On calcule $Z = [X, Y] = (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M)$, de même pour $[Z, X]$ et $[Z, Y]$.

On voit alors que $X, Y, Z, [Z, X]$ et $[Z, Y]$ engendrent $T_{(x,y,M)}(\mathbb{R}^2 \times SO(3))$. Par le théorème de Chow, tout point est atteignable.

## 2. Codistributions

Soit $M$ une variété $C^\infty$ de dimension $n$. Une codistribution $\Gamma$ de dimension $p$ sur $M$ est la donnée en tout point $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $\Gamma_x \subset T_x M^*$ de dimension $p$ satisfaisant la condition suivante : pour tout $y \in M$, il existe un voisinage $U$ de $y$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Omega^1(U)$ telles que $\Gamma_x = \langle \alpha_{1,x}, \ldots, \alpha_{p,x} \rangle$ pour tout $x \in U$.

On dit que $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartient à la codistribution $\Gamma$ si $\alpha_x \in \Gamma_x$ pour tout $x \in U$.

Une codistribution $\Gamma$ de dimension $p$ est dite intégrable si, au voisinage de tout point $y \in M$, il existe une sous-variété $Y$ de dimension $n-p$ de $M$ telle que pour tout $x \in Y$, les éléments de $\Gamma_x$ sont nuls en restriction à $T_xY$.

1– Montrer que les codistributions de dimension $p$ sur $M$ sont naturellement en bijection avec les champs de $(n-p)$-plans sur $M$.

2– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si le champ de $(n-p)$-plans correspondant l'est.

3– Soient $X, Y$ deux champs de vecteurs sur une variété $M$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$. Montrer que :
$$d\alpha(X,Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) + \alpha([X,Y]).$$

4– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à $\Gamma$, $d\alpha$ s'écrit localement $\sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ avec $\beta_i$ appartenant à $\Gamma$.

5– Montrer qu'une codistribution de dimension 1 est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à $\Gamma$, $d\alpha|_{\mathrm{Ker}(\alpha)} = 0$.

**Solution :**

1– A une codistribution, on associe le champ de plans « orthogonal », et réciproquement. Il faut montrer que l'un esst $C^\infty$ si et seulement si l'autre l'est. On détaille un sens, l'autre est analogue.

Supposons donné un champ de $n-p$-plans $C^\infty$. On travaille localement, donc on peut se placer au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Le champ de $(n-p)$-plans est engendré par $X_1, \ldots, X_{n-p}$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $X_i(0) = e_i$. Si $j > n-p$, il existe d'uniques fonctions tels que $(dx_j + \sum_{i=1}^{n-p} f_{i,j}(x)dx_i)(X_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-p$. Ces fonctions sont $C^\infty$ par régularité des solutions d'équations linéaires.

Le champ de $p$-plans « orthogonal »est engendré par les $dx_j + \sum_{i=1}^{n-p} f_{i,j}(x)dx_i$, et est donc $C^\infty$.

2– Cela résulte immédiatement des définitions.

3– On peut montrer cette identité localement, donc en coordonnées. C'est un calcul explicite.

4– Appliquons le théorème de Frobenius au champ de $p$-plans dual. Al'aide de l'identité montrée à la question précédente, on montre ainsi que la codistribution est intégrable si et seulement si, pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à $\Gamma$, $d\alpha$ est nulle en restriction au champ de $p$-plans associé. Ceci est bien impliqué par la condition « $d\alpha$ s'écrit localement $\sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ avec $\beta_i$ appartenant à $\Gamma$ ».

Réciproquement, supposons que $d\alpha$ est nulle en restriction au champ de $p$-plans associé. On travaille localement, en coordonnées, de sorte que le champ de $p$-plans est engendré par $p$ champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$. Considérons $n-p$ champs de vecteurs

$X_{p+1}, \dots, X_n$ (constants par exemple) tels que $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ forment en tout point une base de l'espace tangent. C'est possible quitte à restreindre l'ouvert sur lequel on travaille.

On considère les 1-formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_n$ définies par $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$. On écrit alors $d\alpha$ comme combinaison à coefficients $C^\infty$ des formes $\omega_i \wedge \omega_j$. Comme $d\alpha$ est nulle en restriction au champ de $p$-plans, beaucoup des coefficients sont nuls. Les termes restants sont tous de la forme $\beta_i \wedge \gamma_i$ avec $\beta_i$ appartenant à $\Gamma$. Cela conclut.

5– C'est une conséquence de (la preuve de) la question précédente.

## 3. Dérivations des fonctions continues

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de dérivations non nulles.

**Solution :**

Soit $\delta$ une dérivation. On a $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$ de sorte que $\delta(1) = 0$, et que $\delta(c) = 0$ pour toute constante $c$.

Si $f \geqslant 0$ et $f(x) = 0$, on pose $g = \sqrt{(f)}$. Il vient $\delta(f) = 2g\delta(g)$ de sorte que $\delta(f)(x) = 0$.

Si $f$ est telle que $f(x) = 0$, on montre $\delta(f)(x) = 0$, en écrivant $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$ : on est alors ramené au cas précédent.

Finalement, si $f$ est quelconque, on écrit $f = (f - f(x)) + f(x)$. Les résultats ci-dessus montrent $\delta(f)(x) = 0 + 0 = 0$.

## 4. Champs de vecteurs commutant

Soient $X_1, \dots, X_p$ des champs de vecteurs commutant deux à deux sur une variété $C^\infty$ $M$ de dimension $n$, qui sont indépendants en $x \in M$. On veut montrer qu'il existe une carte au voisinage de $x$ où $X_1, \dots, X_p$ sont égaux aux champs de vecteurs $\partial_1, \dots, \partial_p$ constants de valeur les $p$ premiers vecteurs de la base canonique.

On rappelle que le cas $p = 1$ est le théorème connu de redressement des champs de vecteurs (exercice 1 du TD10). On raisonne donc par récurrence sur $p$ et on suppose $p \geqslant 2$.

1– Montrer qu'on peut choisir une carte au voisinage de $x$, en laquelle $x$ est l'origine et telle que $X_1 = \partial_1, \dots, X_{p-1} = \partial_{p-1}$ et :

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_p, \dots, x_n)\partial_i.$$

2– Montrer qu'on peut supposer de plus que :

$$X_p = \sum_{i=1}^{p-1} f_i(x_p, \dots, x_n)\partial_i + \partial_p.$$

3– Effectuer un changement de coordonnées de la forme $y_i = x_i + g_i(x_p, \dots, x_n)$ si $i \leqslant p-1$ et $y_i = x_i$ si $i \geqslant p$ pour conclure.

**Solution :**

1– Par récurrence sur $p$, on peut trouver une carte telle que $X_1 = \partial_1, \dots, X_{p-1} = \partial_{p-1}$. On écrit alors $X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i$ en coordonnées. La condition $[X_p, X_i] = 0$ implique, par calcul direct, que les fonctions $f_i$ ne dépendent que de $x_p, \dots, x_n$.

Par translation, on peut supposer que $x$ est l'origine de la carte.

2– Considérons le champ de vecteurs $\sum_{i=p}^{n} f_i(x_p, \dots, x_n)\partial_i$ comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n-p+1}$. Il est non nul en $x$ car $X_1, \dots, X_p$ sont indépendants en $x$. On peut donc appliquer le théorème de redressement des champs de vecteurs, et changer de coordonnées locales pour que ce champ de vecteurs devienne égal à $\partial_p$.

Appliquant ce changement de coordonnées aux $n - p + 1$ dernières coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, on obtient une nouvelle carte, qui convient.

3– Soit $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots y_n)$. Sa forme triangulaire montre que la différentielle de $\varphi$ a déterminant 1, de sorte que c'est un difféomorphisme local. On se restreint à des petits ouverts en lesquels c'est un difféomorphisme.

On calcule aisément, si $1 \leqslant i \leqslant p-1$ : $\varphi_* \partial_i(\varphi(y)) = d_y\varphi(\partial_i) = \partial_i$, de sorte que $\varphi_* X_i = \partial_i$. De plus $\varphi_* X_p(\varphi(y)) = d_y\varphi(X_p) = \partial_p + \sum_{i=1}^{p-1}(f_i + \frac{\partial g_i}{\partial x_p})$. Il suffit donc de choisir $g_i$ telle que $g_i(0) = 0$ et $\frac{\partial g_i}{\partial x_p} = -f_i$.

## 5. Deux champs de vecteurs

1– Soient $X$ et $Y$ deux champs de vecteurs $C^\infty$ sur une variété $M$ de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe $f, g$ des fonctions $C^\infty$ strictement positives définies au voisinage de $x$ telles que $[fX, gY] = 0$.

2– Le résultat est-il encore valable si $M$ est de dimension 3 ?

**Solution :**

1–

2–

## 6. Feuilletages

1– Soient $M$ et $N$ deux variétés connexes et $f : M \to N$ une submersion. Montrer qu'il existe un feuilletage sur $M$ dont les feuilles sont les composantes connexes des $f^{-1}(x)$ pour $x \in N$.

2– Dans la situation de la question précédente, les feuilles sont-elles nécessairement toutes difféomorphes ?

3– Montrer qu'il existe un feuilletage de $\mathbb{R}^3$ dont toutes les feuilles sont des cylindres (i.e. sont difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$).

**Solution :**

1– Il s'agit de définir un atlas de cartes feuilleté sur $M$. Soit $x \in M$. D'après le théorème des submersions, il existe un voisinage $U$ de $x$, un voisinage $V$ de $y = f(x)$, un voisinage $W$ de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et un difféomorphisme $\psi : U \to V \times W$ tel que $pr_1 \circ \psi = f$. Quitte à réduire $V$, on peut supposer que c'est le domaine d'une carte $\theta$ de $N$. Posons alors $\widetilde{\psi} = (\theta, \mathrm{Id}) \circ \psi$. C'est une carte au voisinage de $x$, qui envoie les surfaces de niveau locales de $f$ sur des morceaux de sous-espaces vectoriels $\{a\} \times \mathbb{R}^k$. Par conséquent, l'ensemble de telles applications $\widetilde{\psi}$ définit un atlas de cartes feuilleté sur $M$.

2– Ce n'est pas le cas en général : prendre $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et $f$ la projection sur la première coordonnée.

3– Soit $U$ l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ obtenu en lui retirant

$$A = \{(x, 0, \arctan(x) + n\pi/2 | x \in [0, +\infty[, n \in \mathbb{Z}\}.$$

L'intersection de $U$ avec un plan horizontal est $\mathbb{R}^2$ privé d'un point, donc un cylindre. Ceci montre que $U$ admet un feuilletage dont toutes les feuilles sont des cylindres

(on est dans la situation de la première question avec pour submersion l'application « troisième coordonnée »).
Par ailleurs, on voit facilement que $U$ est homéomorphe (donc difféomorphe) à $\mathbb{R}^3$.