Géométrie Différentielle, TD 11 du 25 mai 2012

1. Boule qui roule

On considère une boule posée sur un plan horizontal. L'ensemble des positions possibles de cette boule s'identifie à $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$. En shootant (légèrement) dans la boule, on la fait rouler sans qu'elle glisse.

1– Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.

2– Montrer qu'on peut ainsi faire prendre à la boule toute position choisie à l'avance.

2. Codistributions

Soit M une variété C^∞ de dimension n. Une codistribution Γ de dimension p sur M est la donnée en tout point $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $\Gamma_x \subset T_xM^*$ de dimension p satisfaisant la condition suivante : pour tout $y \in M$, il existe un voisinage U de y et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Omega^1(U)$ telles que $\Gamma_x = \langle \alpha_{1,x}, \ldots, \alpha_{p,x} \rangle$ pour tout $x \in U$.

On dit que $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartient à la codistribution Γ si $\alpha_x \in \Gamma_x$ pour tout $x \in U$.

Une codistribution Γ de dimension p est dite intégrable si, au voisinage de tout point $y \in M$, il existe une sous-variété Y de dimension $n-p$ de M telle que pour tout $x \in Y$, les éléments de Γ_x sont nuls en restriction à T_xY.

1– Montrer que les codistributions de dimension p sur M sont naturellement en bijection avec les champs de $(n-p)$-plans sur M.

2– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si le champ de $(n-p)$-plans correspondant l'est.

3– Soient X, Y deux champs de vecteurs sur une variété M et $\alpha \in \Omega^1(M)$. Montrer que :
$$d\alpha(X,Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) + \alpha([X,Y]).$$

4– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ, $d\alpha$ s'écrit localement $\sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$ avec β_i appartenant à Γ.

5– Montrer qu'une codistribution de dimension 1 est intégrable si et seulement si pour tout $\alpha \in \Omega^1(U)$ appartenant à Γ, $d\alpha|_{\mathrm{Ker}(\alpha)} = 0$.

3. Dérivations des fonctions continues

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de dérivations non nulles.

4. Champs de vecteurs commutant

Soient $X_1, \dots, X_p$ des champs de vecteurs commutant deux à deux sur une variété C^∞ M de dimension n, qui sont indépendants en $x \in M$. On veut montrer qu'il existe une carte au voisinage de x où $X_1, \dots, X_p$ sont égaux aux champs de vecteurs $\partial_1, \dots, \partial_p$ constants de valeur les p premiers vecteurs de la base canonique.

On rappelle que le cas $p = 1$ est le théorème connu de redressement des champs de vecteurs (exercice 1 du TD10). On raisonne donc par récurrence sur p et on suppose $p \geqslant 2$.

1– Montrer qu'on peut choisir une carte au voisinage de x, en laquelle x est l'origine et telle que $X_1 = \partial_1, \dots, X_{p-1} = \partial_{p-1}$ et :

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_p, \dots, x_n)\partial_i.$$

2– Montrer qu'on peut supposer de plus que :

$$X_p = \sum_{i=1}^{p-1} f_i(x_p, \dots, x_n)\partial_i + \partial_p.$$

3– Effectuer un changement de coordonnées de la forme $y_i = x_i + g_i(x_p, \dots, x_n)$ si $i \leqslant p-1$ et $y_i = x_i$ si $i \geqslant p$ pour conclure.

5. Deux champs de vecteurs

1– Soient X et Y deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe f, g des fonctions C^∞ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

2– Le résultat est-il encore valable si M est de dimension 3 ?

6. Feuilletages

1– Soient M et N deux variétés connexes et $f : M \to N$ une submersion. Montrer qu'il existe un feuilletage sur M dont les feuilles sont les composantes connexes des $f^{-1}(x)$ pour $x \in N$.

2– Dans la situation de la question précédente, les feuilles sont-elles nécessairement toutes difféomorphes ?

3– Montrer qu'il existe un feuilletage de $\mathbb{R}^3$ dont toutes les feuilles sont des cylindres (i.e. sont difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$).