Géométrie Différentielle, TD 12 du 01 juin 2012

1. Applications continues et groupes de Lie

1– Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme C^∞ entre groupes de Lie. Montrer que φ est de rang constant.

2– Soient G, H deux groupes de Lie. Montrer qu'un morphisme $\varphi : G \to H$ de classe C^∞ et bijectif est un C^∞-difféomorphisme entre G et H.

3– Soient G, H deux groupes de Lie. Montrer que tout morphisme de groupes continu de G dans H est C^∞. On pourra montrer que le graphe d'un tel morphisme est un sous-groupe de Lie de $G \times H$.

4– Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes continu et propre entre groupes de Lie. Montrer que $\varphi(G)$ est un sous-groupe de Lie de H.

Solution :

1– Soit $x, y \in G$. En utilisant la translation par xy^{-1}, on montre que le rang de φ en x et en y coïncident. L'application φ est donc de rang constant.

2– Comme φ est un morphisme entre groupes de Lie, il est de rang constant. Comme il est injectif, par forme normale, c'est une immersion. Si le rang était strictement majoré par la dimension de H, le théorème du rang constant assurerait que tout $g \in G$ aurait un voisinage U_g tel que $\varphi(U_g)$ soit d'intérieur vide dans H. Par le théorème de Baire, $\varphi(G)$ serait d'intérieur vide dans H, ce qui est absurde. Ainsi, $\dim G = \dim H$, et φ est donc un difféomorphisme local. Comme φ est bijectif, c'est donc un difféomorphisme.

3– Si $\varphi : G \to H$ est un morphisme continu, alors son graphe $\mathcal{G} = \{(g, h) \in G \times H \mid h = \varphi(g)\}$ est un sous-groupe de $G \times H$ (car φ est un morphisme) fermé (car φ est continu). Le théorème de Cartan montre que c'est un sous-groupe de Lie de $G \times H$.

La première projection $\pi_1 : \mathcal{G} \to G$ est un morphisme de groupes C^∞ bijectif entre $\mathcal{G}$ et G. D'après la première question, c'est donc un difféomorphisme. Finalement, $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est C^∞.

4– Montrons que $\varphi(G)$ est fermé. Comme c'est un sous-groupe de H, on pourra conclure par théorème de Cartan. Pour cela, soit $h \in \overline{\varphi(G)}$. Comme H est une variété, on peut considérer un voisinage compact K de h dans H. Comme K est un voisinage de h, $h \in \overline{\varphi(\varphi^{-1}(K))}$. Comme K est compact et φ propre, $\varphi^{-1}(K)$ est compact. Comme φ est continue, $\varphi(\varphi^{-1}(K))$ est encore compact, donc fermé, et $h \in \varphi(\varphi^{-1}(K))$. Par conséquent, $h \in \varphi(G)$, et $\varphi(G)$ est bien fermé.

2. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action naturelle de $SU(2)$ sur V.

3– En déduire l'existence d'un morphisme surjectif de groupes de Lie $SU(2) \to SO(3)$. Quel est son noyau ?

4– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

5– En déduire la cohomologie de de Rham de $SO(3)$.

6– Expliciter des formes différentielles bi-invariantes sur $SO(3)$ qui représentent les classes de cohomologie de $SO(3)$.

Solution :

1– Soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. L'égalité ${}^t\bar{x}x = I_2$ donne $|a|^2+|c|^2 = 1$ et $|b|^2+|d|^2 = 1$. L'égalité $x^t\bar{x} = I_2$ donne aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Ainsi, $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$.
De plus, $1 = \det(x) = ad - bc$. Par Cauchy-Schwarz,

$$1 \leqslant |ad| + |bc| = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz montre que $ad \in \mathbb{R}_+$ et $bc \in \mathbb{R}_-$. Ainsi, si $a = re^{i\theta}$, on a $d = re^{-i\theta}$, et si $b = r'e^{i\theta'}$ on a $c = -r'e^{-i\theta'}$. On a montré que x était de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3$. Réciproquement, une telle matrice appartient bien à $SU(2)$. Ainsi, la formule ci-dessus définit un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^3$ et $SU(2)$.

2– L'espace V est l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Ainsi, $SU(2)$ agit naturellement sur V par conjugaison (c'est l'action Ad). Un élément $X = \begin{pmatrix} ix & -y+iz \\ y+iz & -ix \end{pmatrix}$ de V a pour déterminant $x^2 + y^2 + z^2$. On définit alors une norme euclidienne sur V par $\|X\| = \sqrt{\det(X)}$. Comme la conjugaison ne modifie pas le déterminant, cette norme est invariante sous l'action de $SU(2)$.

3– Soit $\Phi = \mathrm{Ad} : SU(2) \to GL(V)$. Pour la norme de la question précédente, Φ prend ses valeurs dans $O(V)$. Comme $SU(2)$ est connexe, on a même $\Phi(SU(2)) \subset SO(V)$. De plus, $\Phi : SU(2) \to SO(V)$ est C^∞ car polynomiale, c'est donc un morphisme de groupes de Lie.

Si $g \in \ker(\Phi)$, alors g commute avec toutes les matrices de V. En particulier, g commute avec toutes les matrices antisymétriques réelles (prendre $x = z = 0$) et toutes les matrices symétriques rélles (prendre $y = 0$ et diviser par i, ajouter alors λI_2). Ainsi, g commute avec toutes les matrices réelles, c'est donc une homothétie, puis $g = \pm I_2$. Ainsi, Φ engendre un morphisme injectif $\widetilde{\Phi} : SU(2)/\{\pm I_2\} \to SO(V)$.

Par homogénéité, $\widetilde{\Phi}$ est un morphisme de rang constant ; par forme normale et vu son injectivité, c'est une immersion. Ces deux groupes de Lie sont de même dimension 3, donc $\widetilde{\Phi}$ est un difféomorphisme local. En particulier, l'image de $\widetilde{\Phi}$ est un sous-groupe ouvert de $SO(V)$, et il est donc égal à $SO(V)$ par connexité. On a montré que $SO(V)$ était difféomorphe à $SU(2)/\{\pm 1\}$.

4– D'après la question précédente, $SO(V)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\{\pm \mathrm{Id}\} = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

5– On connaît la cohomologie des espaces projectifs réels : $H^0(SO(3)) = \mathbb{R}$, $H^1(SO(3)) = 0$, $H^2(SO(3)) = 0$ et $H^3(SO(3)) = \mathbb{R}$.

6– Les formes différentielles bi-invariantes correspondent aux formes alternées sur l'algèbre de Lie invariantes par l'action adjointe (par conjugaison) du groupe. Il faut donc trouver une 0-forme alternée et une 3-forme alternée invariantes sur l'algèbre de Lie de $SO(3)$ non triviales. (On rappelle que cette algèbre de Lie est constituée des matrices antisymétriques).

La 0-forme alternée est évidente : c'est la forme constante égale à 1. Comme 3-forme alternée, on peut prendre $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

3. Orbites

1– Soit G un groupe de Lie compact agissant de manière C^∞ sur une variété M. Montrer que les orbites de M sont des sous-variétés fermées de M.

2– Ces orbites sont-elles nécessairement toutes de la même dimension ?

3– Le résultat reste-t-il vrai si G n'est pas supposé compact ?

Solution :

1– Soit $x \in M$, et considérons l'orbite de x. Il suffit de montrer qu'elle est une sous-variété au voisinage de x.

L'application $\psi : G \to M$, $g \mapsto gx$ est de rang constant comme on le voit en utilisant les applications de translation sur G. Notons $G_x = \psi^{-1}(x)$: par forme normale des applications de rang constant, c'est un sous-groupe de Lie de G.

Toujours par forme normale des applications de rang constant, il existe un voisinage ouvert V de Id tel que $\psi(V)$ soit une sous-variété de G au voisinage de x. Or $\psi(V) = \psi(G_x V)$. Notons $K = G \setminus (G_x V)$: c'est un fermé de G donc un compact. Son image $\psi(K)$ est donc un compact, qui ne peut rencontrer x par définition de G_x. Ainsi, il existe un voisinage U de x ne rencontrant pas $\psi(K)$.

Sur U, $\psi(G)$ et $\psi(G_x V) = \psi(V)$ coïncident : l'orbite $\psi(G)$ de x est donc bien une sous-variété de M au voisinage de x.

2– Non : on peut faire agir $SO(N)$ sur $\mathbb{R}^N$ linéairement.

3– Non : on prend $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et on fait agir $G = \mathbb{R}$ par translation suivant une direction de pente irrationnelle.

4. Espace hyperbolique réel

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $O(1,n)$ le groupe orthogonal de cette forme quadratique et $SO_0(1,n)$ la composante connexe de l'identité de $O(1,n)$. On considère $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0, \dots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$: c'est l'espace hyperbolique réel de dimension n.

1– Montrer que $SO_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

2– Quel est le stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ pour cette action ?

3– Construire un morphisme de groupes surjectif $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$.

4– En déduire le nombre de composantes connexes de $O(1,n)$.

Solution :

1– Soit $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. On va montrer qu'il peut être envoyé sur $a = (1, 0, \dots, 0)$ par un élément $M \in SO_0(1,n)$. On procède en deux temps. Tout d'abord, comme $SO(n)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{n-1}$, on peut trouver une matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in SO(n)$ envoyant x sur un vecteur de la forme $(x_0, y, 0, \dots, 0)$. Notons qu'on a bien $M_1 \in SO_0(1,n)$ car $SO(n)$ est connexe. On peut alors écrire $x_0 = \cosh(t)$ et $y = -\sinh(t)$ pour un $t \in \mathbb{R}$. Alors $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ envoie (x_0, y) sur $(1, 0)$. En la complétant par un bloc diagonal I_{n-1}, on obtient une matrice M_2 envoyant $(x_0, y, 0, \dots, 0)$ sur a. De plus, faisant varier t, on voit que $M_2 \in SO_0(1,n)$.
La matrice $M = M_2 M_1$ convient.

2– Le stabilisateur de a dans $SO_0(1,n)$ est $SO(n)$; aisin, on a $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = SO_0(1,n)/SO(n)$.

3– On remarque que la quadrique $\{x | q(x) = 1\}$ est réunion disjointe de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $-\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. La question précédente montre que ce sont ces composantes connexes, par connexité de $SO_0(1,n)$. Ainsi un élément de $O(1,n)$ peut préserver $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, ou bien échanger ces deux composantes connexes.
On définit une application $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$ par $\Phi(M) = (1, \det M)$ si M préserve $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $\Phi(M) = (-1, \det M)$ sinon.
La multiplicativité du déterminant, et la discussion ci-dessus montrent que Φ est un morphisme de groupes.
En complétant les matrices $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon, \delta \in \{-1,1\}$ par un bloc diagonal I_{n-1}, on obtient quatre matrices qui prouvent que Φ est surjective.

4– Montrons que $\Phi^{-1}(1,1) = SO_0(1,n)$. Cela montrera que $O(1,n)$ a quatre composantes connexes, à savoir les quatre fibres de Φ.

Soit M telle que $\Phi(M) = (1,1)$. Par la première question, il existe $M' \in SO_0(1,n)$ telle que $M'M(a) = a$. Alors $M'M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Comme $M'M \in O(1,n)$, on a $L = 0$ et $B \in O(n)$. Comme $\det(M) = 1$, $B \in SO(n)$. Par connexité de $SO(n)$, $M'M \in SO_0(1,n)$. On a donc bien $M \in SO_0(1,n)$.
L'autre inclusion est immédiate.

5. Un groupe de Lie n'a pas de petit sous-groupe

Soit G un groupe de Lie, e son élément neutre. Montrer qu'il existe un voisinage de e dans G ne contenant pas d'autre sous-groupe de G que $\{e\}$. On pourra exploiter l'application exponentielle.

Solution :

On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et on considère l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Comme exp est un difféomorphisme local en 0, on peut choisir un voisinage borné U de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\exp : U \to U' := \exp(U)$ soit un difféomorphisme.

Soit $s : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ l'application somme. Par continuité de s, $s^{-1}(U)$ contient un voisinage de $(0,0)$. Il existe donc un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$, qu'on peut choisir inclus dans U quitte à le réduire, tel que pour tous $v, w \in V$, $v + w \in U$. On note $V' = \exp(V)$.

Montrons que le voisinage V' convient alors. Soit H un sous-groupe de G inclus dans V'. Supposons par l'absurde qu'il contient un élément $h \neq e$ et notons $v = (\exp|U)^{-1}(h)$. Comme v est non nul (car $h \neq e$) et que V est borné (car U l'est), on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ minimal tel que $nv \notin V$. Par choix de V, on a cependant $nv = (n-1)v + v \in U$. Alors, $\exp(nv) = \exp(v)^n = h^n$ est un élément de H. Cependant, comme exp réalise une bijection de U sur U' envoyant V sur V', on a $\exp(nv) \notin V'$. C'est absurde, et cela conclut.

6. Exponentielle de matrice

1– Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $T_0 \exp = \mathrm{Id}$.

2– Soient G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, de telle sorte que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Si G est connexe, montrer que $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G.

3– Dans le cas de $G = SO(n)$, montrer que l'exponentielle est surjective. En revanche, pour $G = SL(2,\mathbb{R})$, montrer que ce n'est pas le cas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace $\geqslant -2$).

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'espace des matrices symétriques réelles et l'espace des matrices symétriques réelles définies positives.

5– Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ et

$\operatorname{ad} M = L_M - R_M$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}.$$

6– Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{ad} M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

Solution :

1– La fonction exponentielle est une série entière de domaine de convergence $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc analytique, et en particulier C^∞, comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est donc C^∞ comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL(n, \mathbb{R})$.

Comme $\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$, on a

$$d\exp_M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} M^k X M^{n-k-1}}{n!} \tag{1}$$

(attention à la non commutativité du produit !). En particulier, $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.

2– L'exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to GL(n, \mathbb{R})$ est C^∞ et immersive en 0, par la question précédente. Comme elle prend ses valeurs dans G, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est encore C^∞ et immersive en 0. Comme $\mathfrak{g}$ et G sont de même dimension, c'est un difféomorphisme local en 0. En particulier, $\exp(\mathfrak{g})$ contient un voisinage ouvert de I_n dans G.

Soit H le sous-groupe de G engendré par $\exp(\mathfrak{g})$. Il contient un voisinage ouvert de 0, et est donc ouvert. Son complémentaire est réunion de classes à gauche de H, et est donc également ouvert, si bien que H est fermé. Par connexité, $H = G$.

3– Soit $x \in SO(n)$. Il existe une matrice orthogonale M telle que MxM^{-1} soit diagonale par blocs égaux à 1 ou de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ces blocs sont respectivement l'exponentielle de 0 et $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ (en complexe, le bloc $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, qu'il est facile d'écrire comme une exponentielle de matrice, et on revient ensuite en réel). Il existe donc une matrice antisymétrique X telle que $MxM^{-1} = \exp(X)$. Finalement, $x = \exp(M^{-1}XM)$.

Montrons que, pour $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, i.e., $\operatorname{tr}(X) = 0$, alors $\operatorname{tr}(\exp(X)) \geqslant -2$. Si X a deux valeurs propres réelles, elles sont de la forme a et $-a$, et on a $\operatorname{tr}(\exp(X)) = e^a + e^{-a} \geqslant 0$. Sinon, les valeurs propres a et $-a$ de X sont complexes conjuguées, et elles sont donc imaginaires pures, i.e. $a = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. En particulier, $\operatorname{tr}(\exp(X)) = e^{ib} + e^{-ib} =$

$2\cos(b) \geqslant -2$. Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$.

4– En diagonalisant une matrice symétrique dans une base orthonormée, on vérifie que son exponentielle est symétrique définie positive Réciproquement, soit M symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée, puis en prenant le logarithme des valeurs propres, on construit une matrice symétrique X telle que $\exp(X) = M$. De plus, si P est le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut $\log(\lambda_i)$ aux valeurs propres λ_i de M, on a $X = P(M)$.

Montrons que X est l'unique antéćedent de M par l'exponentielle. Si $M = \exp(X')$, alors X' commute avec M, donc avec tous les polynômes en M, donc avec X. En particulier, $\exp(X' - X) = \exp(X')\exp(X)^{-1} = I_n$. En diagonalisant $X' - X$, on en déduit que $X' - X = 0$.

Ainsi, det réalise une bijection entre l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices symétriques définies positives. Il reste à vérifier que c'est un difféomorphisme.

Soit M une matrice symétrique, montrons que exp est une immersion en M. Quitte à diagonaliser M, on peut supposer que $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. La formule (1) montre alors que

$$d\exp_M(A)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!} A_{ij}.$$

Il suffit donc de vérifier que les coefficients $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!}$ sont non nuls. Si $\lambda_i = \lambda_j$, ce coefficient est égal à e^{λ_i}, et il n'y a rien à faire. Sinon, le coefficient est égal à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\lambda_i^n - \lambda_j^n}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \neq 0.$$

Ainsi, $d\det$ est partout inversible sur l'espace des matrices symétriques. En particulier, det est un difféomorphisme local, et donc une application ouverte. Sa réciproque est donc continue, ce qui conclut la preuve.

5– L'équation (1) peut se réécrire $d\exp_M = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$. De plus, l'équation $\operatorname{ad} M = L_M - R_M$ (i.e. $\operatorname{ad}(M)X = MX - XM$) a été démontrée en cours. Notons de plus que les opérateurs L_M et R_M commutent.

Supposons tout d'abord $L_M - R_M$ inversible. Alors

$$\begin{aligned} d\exp_M &= \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{L_M^n - R_M^n}{L_M - R_M} = \frac{1}{L_M - R_M} \left(\exp(L_M) - \exp(R_M)\right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{ad} M} \exp(L_M)\left(\operatorname{Id} - \exp(-\operatorname{ad} M)\right) = \exp(L_M) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

Notons que cette preuve n'utilise que le fait que L_M et R_M commutent. Lorsque $L_M - R_M$ n'est pas inversible, le même argument s'applique donc à $L_M + \lambda\,\mathrm{Id}$ et R_M avec $\lambda > 0$ assez petit, de telle sorte que $L_M - R_M + \lambda\,\mathrm{Id}$ soit inversible. On conclut ensuite en faisant tendre λ vers 0.

6– Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2}$ sont les valeurs propres complexes de $\mathrm{ad}\, M$, la formule de la question précédente montre que les valeurs propres complexes de $\exp(-M) d \exp_M$ sont $\frac{1-e^{-\lambda_k}}{\lambda_k}$ si $\lambda_k \neq 0$, et 1 si $\lambda_k = 0$. Ainsi, cet opérateur est inversible si et seulement si les valeurs propres non nulles satisfont $e^{-\lambda_k} \neq -1$, i.e. $\lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.