Géométrie Différentielle, TD 12 du 01 juin 2012

1. Applications continues et groupes de Lie

1– Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme C^∞ entre groupes de Lie. Montrer que φ est de rang constant.

2– Soient G, H deux groupes de Lie. Montrer qu'un morphisme $\varphi : G \to H$ de classe C^∞ et bijectif est un C^∞-difféomorphisme entre G et H.

3– Soient G, H deux groupes de Lie. Montrer que tout morphisme de groupes continu de G dans H est C^∞. On pourra montrer que le graphe d'un tel morphisme est un sous-groupe de Lie de $G \times H$.

4– Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes continu et propre entre groupes de Lie. Montrer que $\varphi(G)$ est un sous-groupe de Lie de H.

2. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action naturelle de $SU(2)$ sur V.

3– En déduire l'existence d'un morphisme surjectif de groupes de Lie $SU(2) \to SO(3)$. Quel est son noyau ?

4– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

5– En déduire la cohomologie de de Rham de $SO(3)$.

6– Expliciter des formes différentielles bi-invariantes sur $SO(3)$ qui représentent les classes de cohomologie de $SO(3)$.

3. Orbites

1– Soit G un groupe de Lie compact agissant de manière C^∞ sur une variété M. Montrer que les orbites de M sont des sous-variétés fermées de M.

2– Ces orbites sont-elles nécessairement toutes de la même dimension ?

3– Le résultat reste-t-il vrai si G n'est pas supposé compact ?

4. Espace hyperbolique réel

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $O(1,n)$ le groupe orthogonal de cette forme quadratique et $SO_0(1,n)$ la composante connexe de l'identité de $O(1,n)$. On considère $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0, \dots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$: c'est l'espace hyperbolique réel de dimension n.

1– Montrer que $SO_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

2– Quel est le stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ pour cette action ?

3– Construire un morphisme de groupes surjectif $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$.

4– En déduire le nombre de composantes connexes de $O(1,n)$.

5. Un groupe de Lie n'a pas de petit sous-groupe

Soit G un groupe de Lie, e son élément neutre. Montrer qu'il existe un voisinage de e dans G ne contenant pas d'autre sous-groupe de G que $\{e\}$. On pourra exploiter l'application exponentielle.

6. Exponentielle de matrice

1– Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $T_0 \exp = \mathrm{Id}$.

2– Soient G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, de telle sorte que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Si G est connexe, montrer que $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G.

3– Dans le cas de $G = SO(n)$, montrer que l'exponentielle est surjective. En revanche, pour $G = SL(2,\mathbb{R})$, montrer que ce n'est pas le cas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace $\geqslant -2$).

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'espace des matrices symétriques réelles et l'espace des matrices symétriques réelles définies positives.

5– Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q \geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ et $\mathrm{ad}\, M = L_M - R_M$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}.$$

6– Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{ad}\, M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.