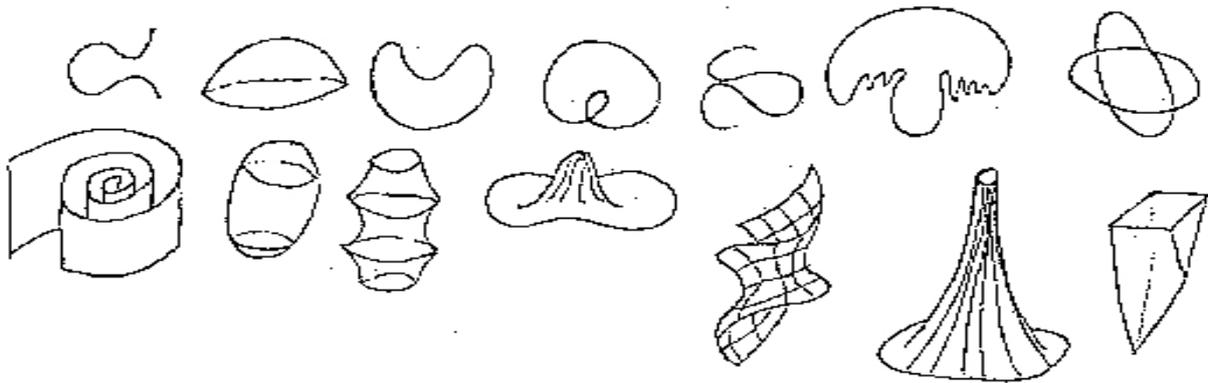


Géométrie Différentielle, TD 1 du 17 février 2012

1. Exemples et contre-exemples de sous-variétés

Les dessins suivants représentent des parties de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Dire, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés C^∞ .



2. Sphère et tore

1- Soit $n \geq 1$. Montrer que la sphère unité est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

2- Soit $0 < \rho < r$. Montrer que

$$T = \{((r + \rho \cos(\theta)) \cos(\varphi), (r + \rho \cos(\theta)) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta)), (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$$

est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

3. Lignes de niveau

Montrer que les lignes de niveau de la fonction suivante :

$$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}$$

sont des sous-variétés C^∞ de \mathbb{R}^3 . Préciser leurs dimensions. Faire un dessin.

4. Un angle n'est pas une sous-variété

1- Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \geq 0, \text{ ou } x \geq 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^2 . On pourra raisonner par l'absurde, et obtenir une contradiction en utilisant le théorème des fonctions implicites.

2- Donner cependant un exemple d'application C^∞ injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 d'image A .

5. Sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$

Soient $0 \leq r \leq n$ des entiers, avec $n \geq 2$.

- 1– Montrer que $\det : A \mapsto \det(A)$ est C^∞ sur $M_n(\mathbb{R})$, et caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de \det est non nulle.
- 2– En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété C^∞ de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer de même que l'ensemble des matrices de rang $n - 1$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.
- 3– Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que, si $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$, alors la matrice $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$.
- 4– Soit $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de rang r . Montrer que c'est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa codimension.
- 5– Montrer que les matrices symétriques de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Calculer sa codimension.
- 6– Montrer que les projecteurs orthogonaux de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques, de dimension $r(n - r)$.
- 7– Montrer que les matrices de rang $\leq n - 1$ ne forment pas une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. On pourra par exemple considérer ce qui se passe en 0.

6. Application C^1 injective

Considérons une application f de classe C^1 de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n qui est injective.

- 1– Montrer que la différentielle de f est de rang m sur un ouvert dense de \mathbb{R}^m .
- 2– En déduire que $m \leq n$.
- 3– La différentielle de f est-elle nécessairement de rang m partout ?

7. Lemme de Morse

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $f(0) = 0$, et $df_0 = 0$. On suppose que d^2f_0 (qui est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n) est non dégénérée, de signature (p, q) .

On va montrer le lemme de Morse : au voisinage de l'origine, après changement de coordonnées, f s'écrit $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$.

- 1– Montrer l'existence de fonctions $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ de classe C^2 telles que $f(x) = \sum x_i g_i(x)$.
- 2– Montrer l'existence de fonctions $(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de classe C^1 telles que $f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}(x)$ et $h_{ij} = h_{ji}$. Autrement dit, en notant $A(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$, on a $f(x) = \langle A(x)x, x \rangle$ (et $A(0) = \frac{1}{2}d^2f_0$).

- 3– Soient E l'espace des matrices carrées de taille n , et F l'espace des matrices symétriques de taille n . Soit $Q \in F$ non dégénérée. En considérant $\xi : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ A & \mapsto & {}^t A Q A \end{cases}$, montrer l'existence d'une application $\varphi \in C^\infty$ définie sur un voisinage U de Q dans F et à valeurs dans E telle que $\varphi(Q) = \text{Id}$ et, pour tout $q \in U$, ${}^t \varphi(q) Q \varphi(q) = q$.
- 4– Construire un changement de coordonnées local au voisinage de 0 tel que, après changement de coordonnées, f s'écrive $f(x_1, \dots, x_n) = \langle \frac{1}{2} d^2 f_0 x, x \rangle$.
- 5– Conclure.