Géométrie Différentielle, TD 2 du 24 février 2012

1. Intersection de sous-variétés

Soient M et N deux sous-variétés C^∞ de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^d$, alors $M \cap N$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^d$. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**.

2– La réciproque est-elle vraie ?

3– Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_xM + T_xN)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors $M \cap N$ est nécessairement une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^d$?

2. Polynômes

Soit $n \geqslant 1$. Notons $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leqslant n$.

1– Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n, est une sous-variété $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et indiquer sa dimension.

2– Montrer que, si $n \geqslant 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'espace tangent en 0.

3– Montrer que la fonction qui associe à un élément de E son unique racine est $\mathbb{C}^\infty$.

3. Le groupe SU_N

1– Expliquer pourquoi, pour montrer que SL_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, il suffit de le vérifier au voisinage de Id.

2– Montrer que SL_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

3– De même, montrer que U_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

4– SL_N et U_N sont-ils transverses en Id ?

5– Montrer que le groupe SU_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

4. Maximum

Soit $n \geqslant 2$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On considère la fonction $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, et on définit :

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}.$$

1– Montrer que $f|_{\mathcal{E}}$ possède une valeur maximale.

2– Quelle est la valeur de ce maximum ?

5. Projections

Soit M une sous-variété C^∞ de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ est non nul, on note $\pi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la projection orthogonale depuis p.

1– On suppose $n > 2m + 1$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit injective. On pensera à appliquer le théorème de Sard.

2– On note TM le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ constitué des (x, v) tels que $x \in M$ et v soit tangent à M en x. Montrer que TM est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^{2n}$ et préciser sa dimension.

3– On suppose $n > 2m$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit immersive.

4– On suppose $n > 2m + 1$ et M compacte. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p(M)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^{n-1}$ et π_p réalise un C^∞-difféomorphisme $M \to \pi_p(M)$.

6. Duale d'une quadrique

Soit V un espace vectoriel réel de dimensions finie, et q une forme quadratique sur V.

1– Montrer que q est une submersion sur $V \setminus \{0\}$ si et seulement si q est non dégénérée.

2– Supposons maintenant q non dégénérée. Notons $Q = \{x \in V | q(x) = 0\}$ la quadrique correspondante. Montrer qu'un hyperplan affine de V ne passant pas par l'origine intersecte Q transversalement.

3– Montrer que l'ensemble des hyperplans vectoriels n'intersectant pas $Q \setminus \{0\}$ transversalement est une quadrique de V^*.

4– On note Q^* cette quadrique : c'est la quadrique duale de Q. Montrer que $Q^{**} = Q$.