Géométrie Différentielle, TD 3 du 2 mars 2012

1. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe $\mathbb{Z}$ sur une variété X de dimension N, engendrées par l'automorphisme f de X. Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé ? Localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$?

1– $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

2– $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

3– $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

4– $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = (2x, y/2)$.

Solution :

1– L'application logarithme $X = \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ montre que cet exemple est isomorphe à l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation de $\ln(2)$. L'action est donc libre et proprement discontinue, et le quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

2– L'action n'est pas libre : 0 est un point fixe. Notons π l'application quotient. Comme $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}x = 0$, on voit que $\pi(0)$ est dans l'adhérence de $\{\pi(x)\}$. Cette bizarrerie montre que le quotient n'est pas séparé et ne peut être localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

3– L'application $\psi : \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{N-1}$ telle que $\psi(x) = (||x||, \frac{x}{||x||})$ est un difféomorphisme, car c'est une bijection C^∞ de réciproque C^∞ : $(x,y) \mapsto xy$. En transportant l'action de $\mathbb{Z}$ par ce difféomorphisme, on se ramène au cas où $X = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{N-1}$ et f est une homothétie de rapport 2 sur la première coordonnée. En utilisant la première question, on voit que l'action est libre et proprement discontinue et que le quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{N-1}$.

4– On vérifie aisément que l'action est libre. En revanche, si K est le segment joignant $(0,1)$ à $(1,0)$, $f^{(n)}(K)$ est le segment joignant $(0, \frac{1}{2^n})$ à $(2^n, 0)$. Un dessin (ou un calcul facile) montre que ces deux segments s'intersectent toujours : le compact K est d'intersection non vide avec tous ses conjugués. Par conséquent l'action n'est pas proprement discontinue.

On note toujours π l'application quotient. Le quotient n'est pas séparé : comme les points $(\frac{1}{2^n}, 1)$ et $(1, \frac{1}{2^n})$ sont dans la même orbite, on voit que les points $\pi(0,1)$ et $\pi(1,0)$ ne sont pas séparés dans le quotient.

En revanche le quotient est localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, on vérifie que tout point $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a un voisinage U qui n'intersecte aucun de ses conjugués : on peut prendre par exemple $U = B(x, \max(|x_1|/4, |x_2|/4))$. Ainsi, le voisinage $\pi(U)$ de $\pi(x)$ dans le quotient est isomorphe à U, donc à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à T_xM pour le produit scalaire canonique.

1– Montrer que ψ est C^∞.

2– Montrer que ψ est surjective.

Solution :

1– Soit $x_0 \in M$. La sous-variété M de $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie sur un voisinage U de x_0 par l'équation $f = 0$ où $f : U \to \mathbb{R}$ est une submersion C^∞. L'application $\beta : x \mapsto df_x$ est également C^∞, à valeurs dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. Notons $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to (\mathbb{R}^{n+1})^*$ l'identification obtenue à l'aide du produit scalaire et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection. Alors $\psi|_{U\cap M} = (\pi \circ \alpha^{-1} \circ \beta)|_{U\cap M}$, ce qui montre ψ est C^∞ en x_0.

2– Soit $v \in \mathbb{S}^n$. La fonction $x \mapsto \langle x, v\rangle$ est continue sur M, elle y atteint donc son maximum en un point x_0. On va montrer que v est orthogonal à $T_{x_0}M$, ce qui conclura. Soit $u \in T_{x_0}M$. Il existe une courbe lisse $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans M avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = u$. Soit alors $f : t \mapsto \langle \gamma(t), v\rangle$. Cette fonction a un maximum local en 0, par définition de x_0. En particulier, $f'(0) = 0$. Mais $f'(0) = \langle u, v\rangle$, donc v est bien orthogonal à tout vecteur de $T_{x_0}M$.

3. Éclatement

Soit $n \geqslant 1$. On identifie $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

1– Montrer que E_n est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– Soit π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n \setminus \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

3– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une immersion C^1. Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I \setminus \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\gamma'(s) \neq \gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\widetilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et que $\widetilde{\gamma}$ soit injective.

Solution :

1– Soit A un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas l'origine. L'espace affine A s'identifie à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ intersectant A, et fournit une carte locale de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. De telles cartes locales de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ recouvrent $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, il suffit de considérer la carte $\mathbb{R}^n \times A$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ et de montrer que $E_n \cap (\mathbb{R}^n \times A) = \{(x,y) | x \in \mathbb{R}y\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times A$.

Pour cela, on introduit le paramétrage $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n \times A$ défini par $f(\lambda, y) = (\lambda y, y)$. Son image est bien $E_n \cap (\mathbb{R}^n \times A)$. L'application f est un homéomorphisme sur son image car on dispose d'une réciproque continue $(x, y) \mapsto (\frac{||x||}{||y||}, y)$. Elle est de plus immersive par calcul de sa différentielle. On a bien montré que E_n est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– L'application de $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ donnée par $(x, X) \mapsto x$ est un difféomorphisme, d'inverse $x \mapsto (x, [x])$.

La première projection est un difféomorphisme entre $\pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, d'inverse $X \mapsto (0, X)$.

3– Comme la projection π est un homéomorphisme entre $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, il y a une unique manière de relever $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ en $\widetilde{\gamma}(t) \in E_n$ tel que $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Comme la dérivée de γ ne s'annule pas, l'ensemble $\gamma^{-1}(0)$ est discret, et donc d'intérieur vide. Il existe donc au plus une manière de prolonger $\widetilde{\gamma}$ en une application continue.

Pour $t \in \gamma^{-1}(0)$, posons $\widetilde{\gamma}(t) = (0, [\gamma'(t)])$. Ainsi, on a bien $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. L'hypothèse $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$ si $s \neq t$ et $s, t \in \gamma^{-1}(0)$ assure que la courbe $\widetilde{\gamma}$ est simple.

Il reste à vérifier qu'elle est continue. C'est trivial hors de $\gamma^{-1}(0)$. Soit donc t_0 tel que $\gamma(t_0) = 0$. Soient $pr_1 : E_n \to \mathbb{R}^n$ et $pr_2 : E_n \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ les projections. Comme $pr_1 \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ est continue en t_0, il suffit de vérifier que $pr_2 \circ \widetilde{\gamma}$ est continue en t_0 pour conclure.

Pour t proche de t_0, il existe $\xi_t \in [t_0, t]$ tel que $\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(\xi_t) = (t - t_0)\gamma'(\xi_t)$. Par conséquent, $pr_2 \circ \widetilde{\gamma}(t) = [\gamma'(\xi_t)]$. Comme γ' est continue en t_0, cela conclut.

4. Une surjection de l'espace projectif sur la sphère de même dimension

1– On considère l'application P de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$(t, x_1, \ldots, x_n) \to \left(\frac{2tx_1}{t^2 + ||x||^2}, \ldots, \frac{2tx_n}{t^2 + ||x||^2}, \frac{-t^2 + ||x||^2}{t^2 + ||x||^2} \right),$$

où l'on a posé :

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Montrer que cette application définit par passage au quotient une application p de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^n$ et que p est C^∞. Quelle est l'image réciproque du pôle nord $N = (0, \ldots, 0, 1)$? Du pôle sud $S = (0, \ldots, 0, -1)$?

2– En utilisant la projection stéréographique de pôle N, montrer que p induit un difféomorphisme de $\mathbb{P}^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$.

3– Que peut-on dire de p pour $n = 1$?

4– Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dont une coordonnée homogène est non nulle est connexe. En admettant le fait que le complémentaire dans $\mathbb{S}^2$ d'une courbe fermée simple a deux composantes connexes, en déduire que $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Solution :

1– Cette application est bien définie sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ car les dénominateurs ne s'y annulent pas. Un calcul immédiat montre qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{S}^n$. Comme les équations sont homogènes, elle passe au quotient en une application $p : \mathbb{P}^n\mathbb{R} \to \mathbb{S}^n$.

La formule pour P montre que P est C^∞. Comme, lue dans les cartes habituelles de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, p est la restriction de P à des hyperplans affines ne passant pas par l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$, p est C^∞.

On calcule que $p^{-1}(S)$ est la droite engendrée par $(0, \ldots, 0, 1)$ et que $p^{-1}(N)$ est l'hyperplan d'équation $t = 0$.

2– Notons $q : \mathbb{S}^n - N \to \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique. C'est un difféomorphisme. Un calcul direct montre que $q \circ p$ défini sur $\{[x_1 : \ldots : x_N : t] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \mid t \neq 0\}$ est l'application $[x_1 : \ldots : x_N : t] \mapsto (x_1/t, \ldots, x_N/t)$. Il s'agit exactement de la carte $t \neq 0$ de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, de sorte que $q \circ p$ est un difféomorphisme. Finalement, p induit un difféomorphisme de $\mathbb{P}^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$ comme composée des difféomorphismes $q \circ p$ et q^{-1}.

3– C'est un difféomorphisme. En effet, vu la question précédente, il suffit de le vérifier au voisinage de $[0 : 1]$. En se plaçant dans la carte $x = 1$, on est ramenés à vérifier que $t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ est une immersion en 0. C'est un calcul immédiat.

4– Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ l'application quotient. Comme $\{x \mid x_1 > 0\}$ est connexe, $\pi(\{x \mid x_1 \neq 0\}) = \pi(\{x \mid x_1 > 0\})$ est connexe.

Quand $n = 2$, $\pi(\{x \mid x_1 = 0\})$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, difféomorphe à $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ donc à $\mathbb{S}^1$. C'est un courbe fermée simple de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ de complémentaire connexe. Cela empêche $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ d'être homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

5. Grassmanniennes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$ un entier. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. L'objet de cet exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété C^∞ compacte.

Si B est un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$ de V, on note U_B le sous-ensemble de $\mathcal{G}_k(V)$ constitué des supplémentaires de B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A,B) &\to U_B \\ f \quad &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A,B)$ et de $\mathcal{L}(A',B')$. Montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.

Solution :

1– L'application $\psi_{A,B}$ associe à $f : A \to B$ son graphe dans $V = A \oplus B$. La projection π_A sur A parallèlement à B réalise un isomorphisme entre le graphe et A : celui-ci est bien de dimension k. D'autre part, son intersection avec B est $\{0\}$, de sorte que $(\mathrm{Id} + f)(A) \in U_B$ et que $\psi_{A,B}$ est bien définie.

Comme une fonction est déterminée par son graphe, $\psi_{A,B}$ est injective.

Enfin, soit $C \in U_B$. Comme $C \cap B = \{0\}$, la projection $\pi_A|_C : C \to A$ sur A parallèlement à B est injective, donc un isomorphisme par dimension. Notant π_B la projection sur B parallèlement à A, on vérifie aisément que C est le graphe de $\pi_B \circ (\pi_A|_C)^{-1} : A \to B$. Ceci montre la surjectivité de $\psi_{A,B}$.

2– Le domaine de définition W de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est l'ensemble des $f : A \to B$ dont le graphe est un supplémentaire de B'. Si (a_i) et (b'_j) sont des bases de A et B', cette condition s'écrit $\det((a_i, f(a_i)), b'_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui montre que W est ouvert. On montre de même que l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A', B')$.

Il suffit pour conclure de montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est C^∞ sur ce domaine de définition W : en effet, le même raisonnement montrera que sa réciproque est C^∞, donc que c'est un C^∞-difféomorphisme.

Pour cela, fixons $x \in A'$ et montrons que $y = \psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}(f)(x)$ dépend de manière C^∞ de $f \in W$. Or y est l'unique solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \pi_{A'}(y) &= 0 \\ \pi_B(x+y) &= f(\pi_A(x+y)) \end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que y dépend de manière C^∞ des coefficients de ce système, donc de f.

3– On prend pour ouverts les $U \subset \mathcal{G}_k(V)$ tels que pour tout $A \in \mathcal{G}_k(V)$ et pour tout supplémentaire B de A, $\psi^{-1}_{A,B}(U \cap U_B)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Cela définit bien une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$.

Comme les $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des homéomorphismes, on vérifie que les ouverts inclus dans U_B sont exactement les sous-ensembles de la forme $\psi_{A,B}(V)$ pour V ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Ainsi, U_B est ouvert et $\psi_{A,B}$ est un homéomorphisme.

Soit $A, A' \in \mathcal{G}_k(V)$. On peut trouver un supplémentaire commun B à A et A' de sorte que $A, A' \in U_B$. Comme U_B est séparé, on peut trouver deux ouverts de U_B séparant A et A'. $\mathcal{G}_k(V)$ est donc bien séparé.

4– C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.

5– On introduit E l'ouvert de V^k constitué des familles libres et $g : E \to \mathcal{G}_k(V)$ l'application qui associe à une famille libre l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrons que g est continue. Vu la définition de la topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$, il suffit de montrer que $V_B = g^{-1}(U_B)$ est ouvert et que $g|_{V_B} : V_B \to U_B$ est continue.

Pour le premier point, choisissons une base (b_j) de B. Alors $(v_i) \in E$ appartient à V_B si et seulement si $\det(v_i, b_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui est bien une condition ouverte.

Pour le second point, il suffit de montrer que $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}$ est continue. Fixons $x \in A$ et soit $(v_i) \in V_B$. Alors $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ est l'unique solution en y du système d'équations linéaires à $n+k$ équations et $n+k$ inconnues y et λ_i suivant :

$$\begin{aligned} \pi_A(y) &= 0 \\ x + y &= \sum_i \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ dépend de manière continue des coefficients de ce système, donc des v_i. Cela montre la continuité de g.

On peut alors conclure. Fixons un produit scalaire sur V. Si K est l'ensemble des familles orthonormales, K est compact car fermé borné dans V^k et $\mathcal{G}_k(V) = g(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.