

Géométrie Différentielle, TD 3 du 2 mars 2012

1. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe \mathbb{Z} sur une variété X de dimension N , engendrées par l'automorphisme f de X . Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé? Localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^N ?

- 1- $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.
- 2- $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.
- 3- $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0, 0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.
- 4- $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f(x, y) = (2x, y/2)$.

2. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte C^∞ de \mathbb{R}^{n+1} . On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à $T_x M$ pour le produit scalaire canonique.

- 1- Montrer que ψ est C^∞ .
- 2- Montrer que ψ est surjective.

3. Éclatement

Soit $n \geq 1$. On identifie $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ à l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^n .

On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

- 1- Montrer que E_n est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.
- 2- Soit π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^n . Montrer que $E_n \setminus \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.
- 3- Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion C^1 . Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I \setminus \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\gamma'(s) \neq \gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\tilde{\gamma} : I \rightarrow E_n$ telle que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et que $\tilde{\gamma}$ soit injective.

4. Une surjection de l'espace projectif sur la sphère de même dimension

1– On considère l'application P de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans \mathbb{R}^{n+1} définie par :

$$(t, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \left(\frac{2tx_1}{t^2 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2tx_n}{t^2 + \|x\|^2}, \frac{-t^2 + \|x\|^2}{t^2 + \|x\|^2} \right),$$

où l'on a posé :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Montrer que cette application définit par passage au quotient une application p de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dans \mathbb{S}^n et que p est C^∞ . Quelle est l'image réciproque du pôle nord $N = (0, \dots, 0, 1)$? Du pôle sud $S = (0, \dots, 0, -1)$?

- 2– En utilisant la projection stéréographique de pôle N , montrer que p induit un difféomorphisme de $\mathbb{P}^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$.
- 3– Que peut-on dire de p pour $n = 1$?
- 4– Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dont une coordonnée homogène est non nulle est connexe. En admettant le fait que le complémentaire dans \mathbb{S}^2 d'une courbe fermée simple a deux composantes connexes, en déduire que $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à \mathbb{S}^2 .

5. Grassmanniennes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $0 \leq k \leq n$ un entier. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V . L'objet de cet exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété C^∞ compacte.

Si B est un sous-espace vectoriel de dimension $n - k$ de V , on note U_B le sous-ensemble de $\mathcal{G}_k(V)$ constitué des supplémentaires de B . Soit A un supplémentaire de B . On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B . On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A, B) &\rightarrow U_B \\ f &\mapsto (\text{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

- 1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.
- 2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A, B)$ et de $\mathcal{L}(A', B')$. Montrer que $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞ -difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.
- 3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.
- 4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞ .
- 5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.