Géométrie Différentielle, TD 4 du 9 mars 2012

1. Les sous-variétés comme lignes de niveau

Soit M une variété C^∞ et $N \subset M$ une sous-variété fermée C^∞ de M.

1– Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans M et une fonction C^∞ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Montrer qu'il existe une fonction C^∞ $F : M \to \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

Solution :

1– Soit $x \in N$. Par définition d'une sous-variété comme lieu des zéros d'une submersion, on peut trouver un voisinage U_x de x et une submersion $G_x : U_x \to \mathbb{R}^k$ tels que $U_x \cap N = G_x^{-1}(0)$. Posons $F_x = \sum_{i=1}^k G_{x,i}^2$. C'est une fonction C^∞ positive sur U_x telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

Soit $x \notin N$. Comme N est fermé, on peut choisir un voisinage U_x de x ne rencontrant pas N. On note $F_x : U_x \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1 : on a encore $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Comme M est paracompacte, on peut trouver un sous-recouvrement localement fini $(U_i)_{i \in I}$ du recouvrement $(U_x)_{x \in M}$. Par construction, il existe sur chaque U_i une fonction C^∞ positive F_i telle que $U_i \cap N = F_i^{-1}(0)$. Soit alors $(\chi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité adaptée à $(U_i)_{i \in I}$. On pose $F = \sum_{i \in I} \chi_i F_i$. C'est une fonction C^∞ sur M ; on vérifie aisément que $N = F^{-1}(0)$.

2. Ruban de Möbius

Le **rang** d'un fibré vectoriel est la dimension des espaces vectoriels fibres de ce fibré vectoriel.

1– Soit X une variété C^∞ de dimension n. Montrer que $X \times \mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel de rang 1 sur X. On dit qu'un fibré vectoriel de rang 1 isomorphe à celui-ci est **trivial**.

2– Soit $p : E \to X$ un fibré vectoriel de rang 1 sur X. Montrer que E est trivial si et seulement si il existe une application C^∞ $s : X \to E$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}$ et $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.

3– Identifions $\mathbb{S}^1$ au cercle unité dans $\mathbb{C}$, de sorte que $z \mapsto -z$ est une involution sans point fixe de $\mathbb{S}^1$. Quel est le quotient $\pi : \mathbb{S}^1 \to X$ par cette involution ?

4– Soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ le fibré vectoriel de rang 1 trivial sur $\mathbb{S}^1$. Montrer que le quotient de ce fibré vectoriel par l'involution $(z,t) \mapsto (-z,-t)$ est un fibré vectoriel E de rang 1 sur X.

5– Montrer que $E \to X$ n'est pas un fibré vectoriel trivial.

Solution :

1– C'est tautologique : on peut prendre comme unique carte de fibré la carte $X \times \mathbb{R}$. Il n'y a alors rien à vérifier.

2– Si E est le fibré trivial, il est isomorphe à $X \times \mathbb{R}$. On peut alors considérer l'application $s : X \to X \times \mathbb{R}$ donnée par $s(x) = (x, 1)$.

Réciproquement, soit E un fibré vectoriel de rang 1 sur X, et $s : X \to E$ une section nulle part nulle. On définit $f : X \times \mathbb{R} \to E$ par $f(x,t) = (x, ts(x))$. C'est une application bijective, respectant les projections sur X, et linéaire fibre à fibre.

Pour montrer qu'elle est C^∞ ainsi que sa réciproque, on se place en un point $e \in E$ au dessus d'un point $x \in X$. Soit U un voisinage de x dans X tel qu'il existe une carte de fibré $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$. L'application s lue dans la carte φ correspond à une application non nulle $\sigma : U \to \mathbb{R}$. Alors, f et f^{-1}, lues dans la carte φ ont pour expression $(x,t) \mapsto (x, t\sigma(x))$ et $(x,t) \mapsto (x, \frac{t}{\sigma(x)})$, ce qui montre qu'elles sont bien C^∞.

3– L'espace topologique quotient est $X = \mathbb{S}^1$ avec une projection $\pi : \mathbb{S}^1 \to X$ donnée par $z \mapsto z^2$. Comme cette application est un difféomorphisme local, la variété quotient est bien $X = \mathbb{S}^1$.

4– Commençons par munir E de cartes. Soit $x \in X$. Comme π est un difféomorphisme local et que x n'a que deux antécédents, on peut choisir un voisinage V de x tel que $\pi^{-1}(V)$ soit réunion disjointe de deux copies de V, échangées par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Alors $\pi^{-1}(V) \times \mathbb{R}$ est un ouvert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-invariant de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Il est réunion de deux ouverts difféomorphes à $V \times \mathbb{R}$, que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ échange, de sorte que la variété quotient $p^{-1}(V)$ est difféomorphe à $V \times \mathbb{R}$. On choisit ces cartes comme cartes de fibrés.

Il reste à vérifier que les changements de carte sont linéaires dans les fibres. On vérifie aisément que, fibre à fibre, ils sont égaux soit à Id soit à $-\operatorname{Id}$ et sont donc linéaires.

5– Si E était trivial, on aurait une section nulle part nulle $s : X \to E$. On en déduit une section nulle part nulle $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ comme suit : à $z \in \mathbb{S}^1$, on associe l'unique (z,t) tel que $\pi(z,t) = s(\pi(z))$. La section σ est bien C^∞, car, dans des cartes comme ci-dessus, elle coïncide avec s.

Cette section vérifie $\sigma(-z) = -\sigma(z)$. En particulier, σ prend des valeurs positives et négatives, mais jamais nulles. Ceci contredit la connexité de $\mathbb{S}^1$.

3. Connexité

Soit Y une variété connexe de dimension n et X une sous-variété de Y de dimension $\leqslant n-2$. Montrer que $Y - X$ est connexe.

Solution :

Supposons que $Y - X$ soit la réunion de deux ouverts fermés non vides U et V. Soit $x \in Y$. On choisit un voisinage W_x de x dans Y tel que dans $W_x \cap (Y - X)$ soit connexe (c'est possible car c'est le cas pour X un sous-espace vectoriel de dimension $\leqslant n-2$ dans $\mathbb{R}^n$). Ainsi, $W_x \cap (Y - X)$ est inclus soit dans U soit dans V.

Notons $U' = \{x \mid W_x \cap (Y - X) \subset U\}$ et $V' = \{x \mid W_x \cap (Y - X) \subset V\}$: c'est une partition de Y. Comme $U \subset U'$ et $V \subset V'$, ces ensembles sont non vides. Ils sont de plus ouverts car si $x \in U'$, $W_x \subset U'$, et si $x \in V'$, $W_x \subset V'$.

Cela contredit la connexité de Y.

4. Plongements

Soit $f : X \to Y$ une application C^∞ entre variétés.

1– Montrer que si f est une immersion injective propre, $f(X)$ est une sous-variété de Y.

2– Montrer que c'est faux si l'on enlève une des trois hypothèses.

3– Plus généralement, montrer que si f est une immersion propre dont les fibres non vides ont cardinal constant d, $f(X)$ est une sous-variété de Y.

Solution :

1– Soit $y = f(x) \in Y$, et montrons que $f(X)$ est une sous-variété de Y au voisinage de y. Comme f est une immersion en x, on peut choisir un voisinage V de x dans X tel que $f(V)$ soit une sous-variété de Y. Soit U un petit voisinage de y dans Y d'adhérence F compacte. Par propreté, $f^{-1}(F)$ est compact. L'ensemble $f^{-1}(F) \setminus V$ est un fermé d'un compact, donc est compact. Son image $f(f^{-1}(F) \setminus V)$ est encore compacte. Elle ne contient pas y par injectivité de f. Posons $U' = U \setminus f(f^{-1}(F) \setminus V)$. Par construction, $f^{-1}(U') \subset V$, de sorte que, par choix de V, $f(X) \cap U' = f(V) \cap U'$ est une sous-variété de Y.

2– On prend $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$ et $f(x) = (x, |x|)$. On vérifie aisément que f est propre et injective. Cependant, $f(X)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ au voisinage de l'origine. Si c'était le cas, l'une des deux applications $f(X) \to \mathbb{R}$ suivantes : $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x - y$ serait un difféomorphisme en $(0, 0)$ (par le théorème des fonctions implicites). Or c'est impossible car ces applications ne sont pas ouvertes au voisinage de l'origine.

On prend $X = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$ et f envoyant la première copie de $\mathbb{R}$ sur l'axe des abscisses et la seconde sur l'axe des ordonnées. On vérifie aisément que f est une immersion propre. Cependant $f(X)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ au voisinage de l'origine. Si c'était le cas, l'une des deux applications $f(X) \to \mathbb{R}$ suivantes : $(x, y) \mapsto x+y$ et $(x, y) \mapsto x-y$ serait un difféomorphisme en $(0, 0)$. Or c'est impossible car ces applications ne sont pas injectives au voisinage de l'origine.

On prend $X =]0;1[\cup]-1;1[$, $Y = \mathbb{R}^2$ et f envoyant $]0;1[$ sur le segment correspondant de l'axe des abscisses et $]-1;1[$ sur le segment correspondant de l'axe des ordonnées. Il est clair que f est une immersion injective. En revanche, le même argument que ci-dessus montre que $f(X)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ au voisinage de l'origine.

3– Soit $y \in f(X)$, et montrons que $f(X)$ est une sous-variété de Y au voisinage de y. Notons $x_1, \dots, x_d$ les antécédents de y. Comme f est une immersion en x_i, on peut choisir un voisinage V_i de x_i dans X tel que $f|_{V_i}$ soit injective et $f(V_i)$ soit une sous-variété de Y. Soit U un petit voisinage de y dans Y d'adhérence F compacte. Par propreté, $f^{-1}(F)$ est compact. L'ensemble $f^{-1}(F) \setminus (\cup_i V_i)$ est un fermé d'un compact, donc est compact. Son image $f(f^{-1}(F) \setminus (\cup_i V_i))$ est encore compacte. Elle ne contient pas y (car f n'a pas d'autres antécédents que les x_i). Posons $U' = U \setminus f(f^{-1}(F) \setminus (\cup_i V_i))$. Par construction, $f^{-1}(U') \subset (\cup_i V_i)$. Comme les images réciproques des éléments de U' ont cardinal constant d et que $f|_{V_i}$ est injective, chaque élément de U' a un et un unique antécédent dans chaque V_i. Ainsi, $f(X) \cap U' = f(V_1) \cap U'$ est une sous-variété de Y.

5. Plongements du plan projectif

On pourra utiliser le quatrième exercice de cette feuille de TD.

1– Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}yz)$.
Montrer que $M = \Phi(\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$.

2– Montrer que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de $\mathbb{S}^5$, difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3– On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace des polynômes en T de degré au plus $n-1$. En utilisant l'application $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^5 \\ x + yT + zT^2 & \mapsto & (x + yT + zT^2)^2 \end{array} \right.$, construire un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}^4$.

Solution :

1– L'application Φ est C^∞ et sa différentielle est manifestement injective en tout point de $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Si $\Phi(x, y, z) = \Phi(x', y', z')$, on vérifie en utilisant les trois premières coordonnées que $x' = \pm x,$, $y' = \pm y$, $z' = \pm z$. Les trois dernières coordonnées permettent de vérifier que les trois signes coïncident. Ainsi, $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$. Réciproquement, ces deux points ont même image. Le cardinal des fibres non vides de Φ est donc constant égal à 2.

Finalement, en utilisant les trois premières coordonnées, on vérifie que Φ est propre comme application de $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{R}^6 \backslash \{0\}$. Ainsi, la question 3 du quatrième exercice appliquée avec $X = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, montre que $\Phi(X)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$.

2– On a

$$\|\Phi(x, y, z)\|^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + z^2x^2 + y^2z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Ainsi, $\Phi^{-1}(M \cap \mathbb{S}^5) = \mathbb{S}^2$. L'application $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6$ est une immersion comme composée de $\Phi : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^6$ et de l'injection canonique de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, qui sont toutes deux des immersions. Mais la restriction $\widetilde{\Phi}$ de Φ à $\mathbb{S}^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{S}^5$. Ainsi, $\widetilde{\Phi} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^5$ est une immersion.

L'application $\widetilde{\Phi}$ est également propre (car définie sur un compact) et ses fibres non vides sont de cardinal 2. Ainsi, son image est une sous-variété de $\mathbb{S}^5$.

Comme $\widetilde{\Phi}(x, y, z) = \widetilde{\Phi}(-x, -y, -z)$, l'application $\widetilde{\Phi}$ induit une application Ψ définie sur le quotient de $\mathbb{S}^2$ obtenu en identifiant deux points diamétralement opposés, i.e., le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Ainsi, l'application $\Psi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{S}^5$ est une immersion injective propre, i.e. un plongement.

3– La différentielle de χ sur $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$d\chi(x, y, z).(a, b, c) = 2(x + yT + zT^2)(a + bT + cT^2).$$

En particulier, $d\chi(x, y, z).(a, b, c) = 0$ si et seulement si $x = y = z = 0$ ou $a = b = c = 0$. Ainsi, χ est une immersion sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

Si $\chi(x,y,z) = \chi(x',y,'z')$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= (x+yT+zT^2)^2 - (x'+y'T+z'T^2)^2 \\ &= ((x+yT+zT^2)-(x'+y'+z'T^2))((x+yT+zT^2)+(x'+y'+z'T^2)). \end{aligned}$$

Ainsi, $(x',y',z') = \pm(x,y,z)$.

Soit $F(x,y,z) = \|\chi(x,y,z)\|^2$. Elle est analytique et vérifie

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^4 F(x,y,z).$$

En particulier, lorsque $F(x,y,z) \neq 0$, la dérivée radiale de F est non nulle. Cela montre d'une part que la surface $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 1\}$ est une sous-variété comme surface de niveau d'une submersion, et d'autre part que la projection radiale $\pi : V \to \mathbb{S}^2$ est une immersion. De plus, il existe sur chaque demi-droite issue de l'origine dans $\mathbb{R}^3$ un unique point en lequel $F = 1$ (puisque F ne s'annule qu'en 0 et que $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^4 F(x,y,z)$). Ainsi, π est une immersion bijective, c'est donc un difféomorphisme.

Considérons $\chi \circ \pi^{-1} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^4$. C'est une immersion comme composée d'immersions. Elle attribue la même image exactement aux points diamétralement opposés, et induit donc un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}^4$.

6. Fibration de Hopf

1– Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il est muni d'une structure de variété C^∞ par les paramétrages locaux $\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \right.$ et $\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{1}{x+iy} \end{array} \right.$.

2– On identifie $\mathbb{S}^3$ avec la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. On définit alors une action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ par $\theta.(z_1,z_2) = (e^{2i\pi\theta}z_1, e^{2i\pi\theta}z_2)$ pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. Pour tout $z = (z_1,z_2)$, montrer que $\theta \mapsto \theta.z$ est un plongement (i.e. une immersion injective propre) de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$.

3– On définit une application $\pi : \mathbb{S}^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ par $\pi(z_1,z_2) = z_1/z_2$. Montrer que cette application est C^∞ et submersive. Quelles sont ses fibres ?

4– Montrer que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times \mathbb{S}^1$ tel que $\pi \circ \psi^{-1} : U \times \mathbb{S}^1 \to U$ est la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre* $\mathbb{S}^1$.

Solution :

1– Les changements de cartes sont C^∞ : c'est la fonction $(x,y) \to (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

2– Cette fonction est injective (au moins un des z_1, z_2 est non nul), immersive (pour la même raison, car sa différentielle en θ est $v \mapsto (2i\pi v e^{2i\pi\theta} z_1, 2i\pi v e^{2i\pi\theta} z_2))$ et propre ($\mathbb{S}^1$ est compact). C'est donc un plongement.

3– Le seul problème pour le caractère C^∞ est quand $z_2 = 0$. Mais, lu dans la deuxième carte, π est alors $(Re(z_2/z_1), Im(z_2/z_1))$ donc est bien C^∞.

Montrons que l'application π est submersive. On le fait en un point (z_1, z_2) où $z_2 \neq 0$, l'autre cas étant analogue. On note $\pi' : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$ l'application définie par $\pi'(z_1, z_2) = z_1/z_2$. On calcule $d\pi'_{(z_1,z_2)}(v_1, v_2) = \frac{v_1}{z_2} - \frac{z_1 v_2}{z_2^2}$, ce qui montre que $d\pi'_{(z_1,z_2)}$ est surjective et a donc un noyau de dimension 2. Comme $(z_1, z_2) \in \mathrm{Ker}(d\pi'_{(z_1,z_2)})$ mais n'appartient pas à $T_{(z_1,z_2)}(\mathbb{S}^3)$, $d\pi_{(z_1,z_2)}$ a un noyau de dimension $\leqslant 1$ et est donc surjective. On a montré que π est submersive en (z_1, z_2).

Les fibres de π sont exactement les orbites de l'action de $\mathbb{S}^1$. Par la question précédentes, elles sont difféomorphes à $\mathbb{S}^1$.

4– Définissons $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3$ par $F_1(0) = (0, 1)$ et $F_1(re^{i\theta}) = (\frac{re^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+r^2}})$. F_1 est bien C^∞. De même, on pose $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3$ par $F_2(0) = (1, 0)$ et $F_2(re^{i\theta}) = (\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \frac{re^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}})$.

Si $z \neq \infty$, on peut choisir $U = \mathbb{C}$ et $\psi^{-1} : (u, \theta) \mapsto \theta.F_1(\varphi_1^{-1}(u))$. De même, si $z \neq 0$, on peut poser $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ et $\psi^{-1} : (u, \theta) \mapsto \theta.F_2(\varphi_2^{-1}(u))$.