Géométrie Différentielle, TD 4 du 9 mars 2012

1. Les sous-variétés comme lignes de niveau

Soit M une variété C^∞ et $N \subset M$ une sous-variété fermée C^∞ de M.

1– Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans M et une fonction C^∞ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Montrer qu'il existe une fonction C^∞ $F : M \to \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

2. Ruban de Möbius

Le **rang** d'un fibré vectoriel est la dimension des espaces vectoriels fibres de ce fibré vectoriel.

1– Soit X une variété C^∞ de dimension n. Montrer que $X \times \mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel de rang 1 sur X. On dit qu'un fibré vectoriel de rang 1 isomorphe à celui-ci est **trivial**.

2– Soit $p : E \to X$ un fibré vectoriel de rang 1 sur X. Montrer que E est trivial si et seulement si il existe une application C^∞ $s : X \to E$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}$ et $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.

3– Identifions $\mathbb{S}^1$ au cercle unité dans $\mathbb{C}$, de sorte que $z \mapsto -z$ est une involution sans point fixe de $\mathbb{S}^1$. Quel est le quotient $\pi : \mathbb{S}^1 \to X$ par cette involution ?

4– Soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ le fibré vectoriel de rang 1 trivial sur $\mathbb{S}^1$. Montrer que le quotient de ce fibré vectoriel par l'involution $(z, t) \mapsto (-z, -t)$ est un fibré vectoriel E de rang 1 sur X.

5– Montrer que $E \to X$ n'est pas un fibré vectoriel trivial.

3. Connexité

Soit Y une variété connexe de dimension n et X une sous-variété de Y de dimension $\leqslant n-2$. Montrer que $Y - X$ est connexe.

4. Plongements

Soit $f : X \to Y$ une application C^∞ entre variétés.

1– Montrer que si f est une immersion injective propre, $f(X)$ est une sous-variété de Y.

2– Montrer que c'est faux si l'on enlève une des trois hypothèses.

3– Plus généralement, montrer que si f est une immersion propre dont les fibres non vides ont cardinal constant d, $f(X)$ est une sous-variété de Y.

5. Plongements du plan projectif

On pourra utiliser le quatrième exercice de cette feuille de TD.

1– Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}yz)$.
Montrer que $M = \Phi(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$.

2– Montrer que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de $\mathbb{S}^5$, difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3– On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace des polynômes en T de degré au plus $n-1$. En utilisant l'application $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^5 \\ x + yT + zT^2 & \mapsto & (x + yT + zT^2)^2 \end{array} \right.$, construire un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}^4$.

6. Fibration de Hopf

1– Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il est muni d'une structure de variété C^∞ par les paramétrages locaux $\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \right.$ et $\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{1}{x+iy} \end{array} \right.$.

2– On identifie $\mathbb{S}^3$ avec la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. On définit alors une action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ par $\theta.(z_1, z_2) = (e^{2i\pi\theta}z_1, e^{2i\pi\theta}z_2)$ pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. Pour tout $z = (z_1, z_2)$, montrer que $\theta \mapsto \theta.z$ est un plongement (i.e. une immersion injective propre) de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$.

3– On définit une application $\pi : \mathbb{S}^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ par $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$. Montrer que cette application est C^∞ et submersive. Quelles sont ses fibres ?

4– Montrer que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times \mathbb{S}^1$ tel que $\pi \circ \psi^{-1} : U \times \mathbb{S}^1 \to U$ est la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre* $\mathbb{S}^1$.