Géométrie Différentielle, TD 6 du 27 mars 2012

1. Orientabilité

1– Soient M et N deux variétés de classe C^∞ orientables. Montrer que $M \times N$ est orientable.

2– Soit M une variété de classe C^∞ quelconque. Montrer que la variété TM est orientable.

Solution :

1– Fixons une orientation de M et N. Si U_M et U_N sont des ouverts de M et N et si $\varphi_M : U_M \to V_M \subset \mathbb{R}^m$ et $\varphi_N : U_N \to V_N \subset \mathbb{R}^n$ sont des cartes orientées, $(\varphi_M, \varphi_N) : U_M \times U_N \to V_M \times V_N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est une carte de $M \times N$. Montrons que ces cartes munissent $M \times N$ d'une structure de variété orientée.

Si (ψ_M, ψ_N) est une autre telle carte, l'application de changement de cartes est $(\psi_M, \psi_N) \circ (\varphi_M, \varphi_N)^{-1}$. Sa différentielle en $x \in V_M \times V_N$ est :

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi_M \circ \varphi_M^{-1}) & 0 \\ 0 & d_x(\psi_N \circ \varphi_N^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif car chacun des deux blocs est de déterminant positif.

2– Soit U un ouvert de M et $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ une carte de M. Soit $T\varphi : TU \to V \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$ la carte de TM associée. Montrons que ces cartes munissent TM d'une structure de variété orientée.

Si ψ est une autre carte de M, l'application de changements de cartes est $T\psi \circ T\varphi^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$. Sa différentielle en (x, v) est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) & \bullet \\ 0 & d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif.

2. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

Indication : on pourra utiliser au besoin la question suivante.

2– Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ et $a_1, \ldots, a_d$ des vecteurs. Alors :
$$(\det(\langle a_i, e_j\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}))^2 = \det(\langle a_i, a_j\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}).$$

3– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

4– Calculer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume canonique.

Solution :

1– L'unicité est évidente car la condition détermine ω_x pour tout $x \in M$.

Pour montrer l'existence, il faut vérifier le caractère C^∞ de ω. Faisons-le au voisinage de $x \in M$. Pour cela on choisit un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et $F : U \to M$ un paramétrage local orienté de M au voisinage de x. On note $u = F^{-1}(x)$. Soit $(a_1, \ldots, a_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormale directe de T_xM. Alors :
$$\begin{aligned}\omega_{F(u)}(T_uF(a_1), \ldots, T_uF(a_d)) &= \det(\langle T_uF(a_i), e_j\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}))\\ &= (\det(\langle T_uF(a_i), T_uF(a_j)\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}))^{1/2}\end{aligned}$$
où l'on a pris la racine positive, car le paramétrage local respecte les orientations.

On a montré la formule ci-dessous qui prouve, comme voulu, le caractère C^∞ de ω :
$$F^*\omega = (\det(\langle T_uF(a_i), T_uF(a_j)\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}))^{1/2}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

2– On écrit $a_i = \sum_{k=1}^d \alpha_i^k e_k$. On calcule alors $\langle a_i, a_j\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_i^k \alpha_j^k$. La matrice des $\langle a_i, a_j\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ est donc le produit de la matrice des α_i^k par sa transposée. On obtient le résultat en comparant les déterminants.

3– On vérifie aisément que la forme ω définie sur $\mathbb{S}^{n-1}$ par la formule $\omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$ vérifie les propriétés requises, et est donc (par unicité) la forme volume canonique sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Que cette forme coïncide avec celle donnée dans l'énoncé résulte juste du développement du déterminant suivant la première colonne.

4– On calcule $d\sigma = n\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. On peut alors appliquer la formule de Stokes : en notant $\mathbb{B}^n$ la boule unité,
$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma|_{\mathbb{S}^{n-1}} = n\int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$
On reconnaît le volume d'une boule connu classiquement (procéder par récurrence sur n, appliquer Fubini, faire un changement de variables trigonométrique et reconnaître une intégrale de Wallis). Tous calculs faits,
$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

3. Bouteille de Klein

On identifie $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on considère $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On introduit $\sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : (\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$.

1– Montrer que $K = \mathbb{T}^2 / \langle \mathrm{Id}, \sigma \rangle$ a une structure naturelle de variété de classe C^∞.

2– Montrer que K n'est pas orientable.

3– En admettant que $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas difféomorphes, montrer que K n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Solution :

1– L'automorphisme σ est sans point fixe car il change toujours la seconde coordonnée. Le groupe $\langle \mathrm{Id}, \sigma \rangle$ agit donc librement. Il agit de plus proprement car c'est un groupe fini. Le quotient admet donc une structure de variété de classe C^∞.

2– Notons π l'application quotient. Supposons par l'absurde que K est orientable et fixons une orientation de K. Comme π est un difféomorphisme local, elle induit une orientation de $\mathbb{T}^2$. Quitte à changer d'orientation, on peut supposer que c'est l'orientation canonique de $\mathbb{T}^2$ (i.e. l'orientation produit où les orientations des facteurs sont induites par l'orientation canonique de $\mathbb{R}$). Alors, comme $\pi \circ \sigma = \pi$, σ préserve l'orientation de $\mathbb{T}^2$. Cependant, lu dans des cartes orientées adéquates, $\sigma :]-\pi; \pi[\times]-\pi; \pi[\to]-\pi; \pi[\times]0; 2\pi[$ a pour expression $(\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$ qui est de déterminant -1 donc négatif. L'automorphisme σ ne préserve donc pas l'orientation de $\mathbb{T}^2$. C'est absurde.

3– Le choix d'une orientation sur $\mathbb{T}^2$ identifie $\mathbb{T}^2$ à l'ensemble des couples (x, o) où x est un point de K et o une orientation de T_xK. De même, le choix d'une orientation $\mathbb{S}^2$ identifie $\mathbb{S}^2$ à l'ensemble des couples (x, o) où x est un point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et o une orientation de $T_x\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On vérifie qu'à l'aide de ces identifications, un difféomorphisme entre K et $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ induirait un difféomorphisme entre $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$.

La question précédente montre que $\mathbb{T}^2$ est le revêtement des orientations de K. Comme le revêtement des orientations de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est $\mathbb{S}^2$, il suffit de montrer que $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas difféomorphes. Or, par le théorème de Jordan, le complémentaire d'une courbe simple tracée dans $\mathbb{S}^2$ n'est jamais connexe, alors que le complémentaire de $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ dans $\mathbb{T}^2$ est connexe. Cela empêche ces deux variétés d'être homéomorphes et a fortiori difféomorphes.

4. Volume d'un quotient

Soit X une variété compacte de dimension n. Soit G un groupe fini agissant librement par C^∞-difféomorphismes sur M. On note $p : X \to X/G$ le quotient.

1– On suppose que X/G est orientée. Montrer que X est munie d'une orientation naturelle.

2– Soit ω une n-forme différentielle sur X/G. Montrer que :

$$\int_X p^*\omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$

On pourra commencer par traiter le cas où ω a support inclus dans un ouvert suffisament petit de X/G.

Solution :

1– On va prendre pour cartes orientées de X les cartes construites comme suit. Soit $x \in X$, et U, V des voisinages de x et $p(x)$ tels que p réalise un difféomorphisme $U \to V$. Quitte à réduire U et V, on peut supposer qu'il existe une carte orientée $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ de X/G. Alors $\varphi \circ p : V \to \mathbb{R}^n$ est une carte orientée de X.

Il faut vérifier que les changements de carte ont jacobien positif. Mais le jacobien en un point x du changement de carte entre les cartes $\varphi \circ p$ et $\psi \circ p$ coïncide avec le jacobien en $p(x)$ du changement de carte entre les cartes φ et ψ, qui est positif car les cartes φ et ψ sont des cartes orientées de X/G.

2– Soit $y \in X/G$, et $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_{|G|}\}$. Comme p est un difféomorphisme local, si U_y est un voisinage suffisament petit de y, $p^{-1}(U_y)$ est réunion disjointe de $|G|$ ouverts $U_y^1, \dots, U_y^{|G|}$ difféomorphes par p à U_y et voisinages respectifs de $x_1, \dots, x_{|G|}$. Les U_y forment un recouvrement ouvert de X/G. Par compacité, on extrait un recouvrement fini $U_1, \dots, U_r$ (et on note $p^{-1}(U_j) = U_j^1 \cup \dots \cup U_j^{|G|}$). On choisit une partition de l'unité χ_j adaptée au recouvrement ouvert U_j. On écrit alors :

$$\int_X p^*\omega = \sum_j \int_X p^*(\chi_j\omega) = \sum_j \sum_{i=1}^{|G|} \int_{U_j^i} p^*(\chi_j\omega).$$

Comme p induit un difféomorphisme $U_j^i \to U_j$, il vient :

$$\int_X p^*\omega = \sum_j |G| \int_{U_j} \chi_j\omega = |G| \sum_j \int_{X/G} \chi_j\omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$

5. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de $\mathbb{S}^2$ délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de $\mathbb{S}^2$, de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M.

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds. Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M.

Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x)ds + 2\iint_M N(x)da = 0.$$

Solution :

On va considérer des formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les formules usuelles restent valables en raisonnant coordonnées par coordonnées dans $\mathbb{R}^3$.

Introduisons la 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\omega_x(v) = -x \times v$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. En particulier, on vérifie que $\omega|_{\partial M} = n(x)ds$.

Introduisons la 2-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. En particulier, on vérifie que $\alpha|_M = N(x)da$.

On calcule de plus que $\mathrm{d}\omega = -2\alpha$. Par exemple, la première coordonnée de ω est donnée par $x_3dx_2 - x_2dx_3$, de sorte que la première coordonnée de $\mathrm{d}\omega$ est donnée par $-2dx_2 \wedge dx_3$. Mais la première coordonnée de α est bien $dx_2 \wedge dx_3$.

On applique alors le théorème de Stokes : $\int_{\partial M} n(x)ds = \int_{\partial M} \omega = \iint_M \mathrm{d}\omega = -2\iint_M \alpha = -2\iint_M N(x)da$

6. Formule de Cauchy-Crofton

1– On identifie l'ensemble des droites orientées du plan euclidien à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en associant à (θ, p) la droite d'équation $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ de vecteur directeur $(\sin\theta, -\cos\theta)$. Montrer que la forme différentielle $dp \wedge d\theta$ est invariante sous l'action naturelle des isométries affines directes du plan.

2– Soit C une courbe fermée C^∞ du plan, de longueur L paramétrée par son abscisse curviligne s. Soit $F : [0; L] \times [0; \pi] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ l'application qui à (s, φ) associe la droite passant par le point de C d'abscisse curviligne s et faisant un angle φ avec la tangente orientée à C en ce point. Montrer que :

$$F^*(dp \wedge d\theta) = \sin\varphi ds \wedge d\varphi.$$

3– En déduire que pour presque toute droite D, l'ensemble $D \cap C$ est fini, et que

$$\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} \mathrm{Card}(D \cap C)dp \wedge d\theta = 2L.$$

Solution :

1– Il suffit de vérifier l'invariance par l'action de générateurs de ce groupe : par exemple, les rotations d'angle α autour de l'origine et les translations de vecteur (a, b).

On calcule que la rotation d'angle α envoie la droite (p,θ) sur la droite $(p,\theta+\alpha)$ et que la translation de vecteur (a,b) envoie la droite (p,θ) sur la droite $(p+a\cos\theta+b\sin\theta,\theta)$. Ces deux transformations préservent bien $dp\wedge d\theta$.

2– Soit α l'angle que fait la tangente à C avec l'axe des abscisses. Comme C est paramétrée par son abscisse curviligne, le vecteur tangent $(x'(s),y'(s))$ est de norme 1 et $(x'(s),y'(s))=(\cos\alpha,\sin\alpha)$. On calcule

$$F(s,\varphi)=(\varphi+\alpha-\pi/2,x(s)\sin(\alpha+\varphi)-y(s)\cos(\alpha+\varphi)),$$

ce qui montre que F est C^∞.

Calculons alors :

$$\begin{aligned}F^*dp&=fF^*d\theta+(x'(s)\cos\theta+y'(s)\sin\theta)ds\\&=fF^*d\theta+(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)ds\\&=fF^*d\theta+\cos(\theta-\alpha)ds\\&=fF^*d\theta+\sin\varphi ds,\end{aligned}$$

où f est vune fonction que nous n'avons pas besoin d'expliciter. De même,

$$F^*d\theta=d\varphi+gds,$$

où g est une fonction. Finalement,

$$\begin{aligned}F^*(dp\wedge d\theta)&=\sin\varphi ds\wedge F^*d\theta\\&=\sin\varphi ds\wedge d\varphi\end{aligned}$$

3– Par conséquent, les points critiques de F sont les (s,φ) tels que φ soit multiple de π : c'est-à dire les points où la droite $D=F(s,\varphi)$ est tangente à C. On note E cet ensemble, qui est compact. Son image $F(E)$, l'ensemble des valeurs critiques est fermé par compacité et de mesure nulle par Sard.

Par compacité de C, hors de cet ensemble, la droite D intersecte C en un nombre fini de point. Soit M_k l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à $F(E)$ et qui ont k antécédents par F. Soit $M'_k=F^{-1}(M_k)$. Comme F est propre (la source est compacte), est un difféomorphisme local hors de E, et est à fibres finies hors de $F(E)$, on voit que M_k est ouvert et $F:M'_k\to M_k$ est un revêtement à fibres de cardinal k. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_{M'_k}\sin\varphi ds\wedge d\varphi&=\int_{M'_k}F^*(dp\wedge d\theta)\\&=k\int_{M_k}dp\wedge d\theta\\&=\int_{M_k}\mathrm{Card}(D\cap C)dp\wedge d\theta\end{aligned}$$

Sommant sur k, et prenant en compte que $F(E)$ et $F^{-1}(F(E))$ sont de mesure nulle, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} \mathrm{Card}(D\cap C)dp\wedge d\theta &= \int_{[0;L]\times[0;\pi]} \sin\varphi ds\wedge d\varphi \\ &= L\int_{[0;\pi]} \sin\varphi d\varphi \\ &= 2L\end{aligned}$$