

Géométrie Différentielle, TD 6 du 27 mars 2012

1. Orientabilité

- 1– Soient M et N deux variétés de classe C^∞ orientables. Montrer que $M \times N$ est orientable.
- 2– Soit M une variété de classe C^∞ quelconque. Montrer que la variété TM est orientable.

2. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

- 1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et e_1, \dots, e_d est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de \mathbb{R}^n) directe (au sens de l'orientation de M) de $T_x M$,

$$\omega_x(e_1, \dots, e_d) = 1.$$

Indication : on pourra utiliser au besoin la question suivante.

- 2– Soit (e_1, \dots, e_d) une base orthonormée de \mathbb{R}^d et a_1, \dots, a_d des vecteurs. Alors :

$$(\det(\langle a_i, e_j \rangle_{1 \leq i, j \leq d}))^2 = \det(\langle a_i, a_j \rangle_{1 \leq i, j \leq d}).$$

- 3– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à \mathbb{S}^{n-1} de

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n.$$

- 4– Calculer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume canonique.

3. Bouteille de Klein

On identifie \mathbb{S}^1 à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on considère $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On introduit $\sigma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 : (\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$.

- 1– Montrer que $K = \mathbb{T}^2 / \langle \text{Id}, \sigma \rangle$ a une structure naturelle de variété de classe C^∞ .
- 2– Montrer que K n'est pas orientable.
- 3– En admettant que \mathbb{T}^2 et \mathbb{S}^2 ne sont pas difféomorphes, montrer que K n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

4. Volume d'un quotient

Soit X une variété compacte de dimension n . Soit G un groupe fini agissant librement par C^∞ -difféomorphismes sur M . On note $p : X \rightarrow X/G$ le quotient.

- 1– On suppose que X/G est orientée. Montrer que X est munie d'une orientation naturelle.
- 2– Soit ω une n -forme différentielle sur X/G . Montrer que :

$$\int_X p^* \omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$

On pourra commencer par traiter le cas où ω a support inclus dans un ouvert suffisamment petit de X/G .

5. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de \mathbb{S}^2 délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de \mathbb{S}^2 , de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M .

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds . Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M .

Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x) ds + 2 \iint_M N(x) da = 0.$$

6. Formule de Cauchy-Crofton

- 1– On identifie l'ensemble des droites orientées du plan euclidien à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en associant à (θ, p) la droite d'équation $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ de vecteur directeur $(\sin \theta, -\cos \theta)$. Montrer que la forme différentielle $dp \wedge d\theta$ est invariante sous l'action naturelle des isométries affines directes du plan.
- 2– Soit C une courbe fermée C^∞ du plan, de longueur L paramétrée par son abscisse curviligne s . Soit $F : [0; L] \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ l'application qui à (s, φ) associe la droite passant par le point de C d'abscisse curviligne s et faisant un angle φ avec la tangente orientée à C en ce point. Montrer que :

$$F^*(dp \wedge d\theta) = \sin \varphi ds \wedge d\varphi.$$

- 3– En déduire que pour presque toute droite D , l'ensemble $D \cap C$ est fini, et que

$$\int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \text{Card}(D \cap C) dp \wedge d\theta = 2L.$$