Géométrie Différentielle, TD 7 du 6 avril 2012

1. Degré d'une application

1– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
–Montrer que f se prolonge en une application C^∞ $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.
–Calculer $\deg(\widetilde{f})$.
–Montrer que f est surjective.

2– Soit M une variété à bord compacte orientée de dimension d, et N une variété compacte orientée de dimension $d-1$.
–Soit $f : \partial M \to N$ une application C^∞. Montrer que $\deg(f|_{\partial M}) = 0$.
–En déduire qu'il n'existe pas d'application $f : M \to \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$.

3– Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes ; on suppose que Q est non nul.
–Montrer que P/Q induit une application C^∞ $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
–Calculer $\deg(f)$.

Solution :

1– Comme f coïncide avec l'identité hors d'un compact, f se prolonge en $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ en posant $\widetilde{f}(\infty) = \infty$. $\widetilde{f}$ est bien C^∞ car f et l'identité sont C^∞.

Soit K ce compact, et soit x une valeur régulière de $\widetilde{f}$ dans l'ouvert complémentaire de $K \cup f(K)$. Alors x possède un et un unique antécédent par $\widetilde{f}$: lui-même. De plus, $d_x\widetilde{f} = \mathrm{Id}$ préserve l'orientation. Ceci montre que $\deg(\widetilde{(f)}) = 1$.

Alors, si f nétait pas surjective, soit $x \in \mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à son image. C'est une valeur régulière de $\widetilde{f}$ sans antécédents par $\widetilde{f}$. Ceci montre $\deg(\widetilde{f}) = 0$: c'est une contradiction.

2– On choisit ω une forme volume sur N telle que $\int_N \omega = 1$, et on calcule :

$$\int_{\partial M} f|_{\partial M}^* \omega = \int_M df^* \omega = \int_M f^* d\omega = 0,$$

par le théorème de Stokes, et car $d\omega = 0$ pour raisons de degré. Ainsi, $\deg(f|_{\partial M}) = 0$. Comme $\deg(\mathrm{Id}) = 1$, on en déduit qu'il n'existe pas d'application $f : M \to \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$.

3– Ecrivons $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, où ces deux polynômes sont sans facteurs communs, et où $a_m, b_n \neq 0$. On prolonge la fonction P/Q qui est a priori définie hors des zéros de Q et du point à l'infini $[1 : 0]$ par la valeur $[1 : 0]$ en les zéros de Q. On la prolonge également en $[1 : 0]$ par la valeur $[0 : 1]$ si $m < n$, la valeur a_m/b_n si $m = n$, et la valeur $[1 : 0]$ si $m > n$.

On vérifie que cette fonction est C^∞ en utilisant la carte $z \mapsto 1/z$ au voisinage de $[1:0]$. En changeant de carte au but, la nouvelle expression de P/Q est Q/P, qui est bien C^∞ et nulle en les zéros de Q. En changeant de carte à la source, la nouvelle expression de P/Q est $P(1/z)/Q(1/z)$, qui est C^∞ et prend en zéro la bonne valeur si $m \leqslant n$. Le dernier cas se traite de même, en changeant de carte à la source et au but.

La fonction P/Q est holomorphe, donc préserve l'orientation. Le degré de P/Q est donc le cardinal de l'image réciproque d'un élément général λ de $\mathbb{C}$. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ suffisament général (par exemple tel que $P([1:0]) \neq \lambda$, ...). On cherche à compter le nombre de racines de $P(x) - \lambda Q(x)$. Si λ n'est pas de la forme $P(z)/Q(z)$ pour un z tel que $P(z)Q'(z) = Q(z)P'(z)$, ce polynôme est à racines simples, et a donc exactement $\max(m,n)$ racines. Ainsi, $\deg(f) = \max(m,n)$.

2. Courbure de Gauss

1– Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).

3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$.

4– Montrer qu'on peut trouver une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ difféomorphe à $\mathbb{S}^2$ qui possède un point de courbure de Gauss nulle.

Solution :

1– L'application de Gauss est l'identité. Il est donc immédiat de calculer que la courbure est constante égale à 1.

2– Comme S est compacte, on peut trouver un point $x \in S$ à distance maximale de l'origine. Quitte à effectuer une rotation et une homothétie, on peut supposer que $x = (1,0,0)$. Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^3$ où S est le lieu des zéros d'une submersion $F : U \to \mathbb{R}$. Quitte à multiplier F par un scalaire, on peut supposer que $\nabla F(x) = e_1$.

L'application $\nabla F : U \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ admet pour différentielle en x la matrice hessienne $\mathrm{Hess}_x(F)$. Comme l'application de Gauss ν est, sur $U \cap S$, la composée de l'inclusion de $U \cap S$ dans U, de l'application ∇F et de la projection $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2$, on calcule la matrice de la différentielle $d_x\nu$:

$$d_x\nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_2}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3}(x) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_3}(x) \end{pmatrix}.$$

Comme $K(x) = \det d_x\nu$, on veut montrer que le déterminant de cette matrice est strictement positif. Pour cela, on va montrer que la forme quadratique $Q(h_2, h_3) = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_2}(x)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3}(x)h_2h_3 + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_3}(x)h_3^2$ est définie positive.

Pour cela, choisissons h_2, h_3 petits, et posons $h_1 = -(h_2^2+h_3^2)/4$, de sorte que $(1+h) \notin B(0,1)$. En particulier, comme $S \subset B(0,1)$ par choix de x, on a $F(1+h) \geqslant 0$. Ne retenant que les termes d'ordre minimal dans le développement de Taylor de f (i.e. d'ordre 2 en h_2 et h_3, il vient $Q(h_2, h_3) \geqslant (h_2^2 + h_3^2)/4$, de sorte que Q est définie positive, comme voulu.

3– Par le théorème de Gauss-Bonnet, l'intégrale sur S de la courbure est négative ou nulle (car S n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$). Il existe donc un point y où la courbure est négative ou nulle. Comme la courbure est strictement positive en un point x, la connexité de S assure qu'il existe un point où la courbure s'annule.

4– Il suffit de plonger $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de sorte qu'il existe un ouvert de $\mathbb{S}^2$ dont l'image est contenue dans un plan.

3. Applications de la sphère dans elle-même

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3– Soit $x \in \mathbb{S}^n$ et $U \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ et une application C^∞ $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tels que f réalise un difféomorphisme entre V et $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, et que $f(\mathbb{S}^n \setminus V) = \{x\}$.

4– Soit $d \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même.

5– Supposons n impair. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier pair. Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même telle que $f(-x) \neq -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$.

Solution :

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ sans point fixe. L'application $(t,x) \mapsto \frac{-tx+(1-t)f(x)}{||-tx+(1-t)f(x)||}$ est alors une homotopie entre f et l'antipodie. Comme l'antipodie a degré $(-1)^{n+1}$, on a $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ telle qu'il n'existe pas $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$. Alors $(t,x) \mapsto \frac{t/2f(-x)+(1-t/2)f(x)}{||t/2f(-x)+(1-t/2)f(x)||}$ est une homotopie entre f et $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Cette dernière application a toutes ses fibres de cardinal pair. En particulier, son degré pair. Ceci montre que $\deg(f)$ est pair.

3– Quitte à restrindre U, on peut supposer que U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On choisit alors $V = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. D'autre part, on écrit $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Il est alors facile de construire $f : U = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ à la main en la choisissant de la forme $y \mapsto \rho(||y||^2)$.

4– Supposons $d \geqslant 0$. On choisit d ouverts disjoints $U_1, \ldots, U_d$; on considère des applications $f_1, \ldots, f_d$ comme dans la question précédente. Comme l'image réciproque d'un point général de $\mathbb{S}^n$ par f_i a un antécédent, $\deg(f_i)$ vaut 1 ou -1. Quitte à composer au but par une symétrie, on peut supposer que $\deg(f_i) = 1$. Soit f l'application C^∞ qui coïncide avec f_i sur U_i et qui vaut x ailleurs. Par construction, l'image réciproque d'un point $\neq x$ est constituée de d points, et toutes les différentielles préservent l'orientation. Ainsi, $\deg(f) = d$.

Si $d < 0$, on compose au but une application de degré $-d$ avec une symétrie, pour obtenir une application de degré d.

5– Si $d = 2\delta \geqslant 0$ est pair, on choisit δ ouverts $U_1, \ldots, U_\delta$ tels que $U_1, \ldots, U_\delta, -U_1, \ldots, -U_\delta$ soient disjoints. On considère des applications $f_1, \ldots, f_\delta$ comme dans la question 3. Comme dans la question ci-dessus, on peut supposer qu'elles sont de degré 1. Comme n est impair, $y \mapsto f_i(-y)$ est de degré 1. Soit f l'application C^∞ qui coïncide avec f_i sur U_i, avec $y \mapsto f_i(-y)$ sur $-U_i$ et qui vaut x ailleurs. L'application f est de degré d et convient.

Si $d < 0$, on compose avec une symétrie l'application de degré $-d$ construite ci-dessus, pour obtenir une application de degré d.

4. Champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$

1– Soit $i \in \mathbb{Z}$. Construire un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ s'annulant en l'origine et seulement en l'origine, et d'indice i en l'origine.

2– On considère $\mathbb{S}^2$ comme réunion de $\mathbb{R}^2$ et du point à l'infini ∞. Considérons un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et qui est d'indice i en 0. Quel est son indice en ∞ ?

Solution :

1– Faire un dessin !

2– On peut appliquer le théorème de Poincaré-Hopf. On a : $\mathrm{ind}_0 + \mathrm{ind}_\infty = \chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Ainsi, l'indice en ∞ vaut $2 - i$.

5. Une surface de genre 2

Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, et de son produit scalaire usuel. Soit M le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (16 - x^2 - y^2)((x-2)^2 + y^2 - 1)((x+2)^2 + y^2 - 1) = z^2\}\,.$$

1– Montrer que M est une variété compacte de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 2.

2– Montrer que l'intersection de M avec chacun des plans de coordonnées (d'équation respective $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$) est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 1. Donner le nombre de composantes connexes.

3– Pour tout u dans M on note $X(u)$ et $Z(u)$ la projection orthogonale sur T_uM de respectivement $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$. Montrer que ce sont deux champs de vecteurs de classe C^∞ sur M et trouver les points de M où ils s'annulent.

4– On considère Γ le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^3$ engendré par le retournement le long de l'axe des x (c'est à dire $(x, y, z) \to (x, -y, -z)$). Montrer que Γ préserve M et que l'espace topologique quotient $\Gamma\backslash M$ est une variété topologique.

5– Montrer qu'au voisinage des points $(1, 0, 0)$ et $(3, 0, 0)$ dans M, il existe une carte locale (U, φ) à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que, en tout point (x, y) de cet ouvert, on a $\varphi_*(X_{|U}) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

6– Montrer que si ψ_t est le flot local de X, alors on a pour tout $(0, y, z) \in M$ avec $y \neq 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t(0, y, z) = (4, 0, 0)\,.$$

7– Montrer que M est homéomorphe à l'espace topologique obtenu en recollant à partir de deux copies du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ privée du disque $B(0, \frac{1}{3})$, en les recollant par l'identité le long des cercles bords de ces disques. Montrer que $\Gamma\backslash M$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.

Solution :

Voir la correction de l'exercice 86 dans le polycopié de F. Paulin.