Géométrie Différentielle, TD 7 du 6 avril 2012

1. Degré d'une application

1– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
–Montrer que f se prolonge en une application C^∞ $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.
–Calculer $\deg(\widetilde{f})$.
–Montrer que f est surjective.

2– Soit M une variété à bord compacte orientée de dimension d, et N une variété compacte orientée de dimension $d-1$.
–Soit $f : \partial M \to N$ une application C^∞. Montrer que $\deg(f|_{\partial M}) = 0$.
–En déduire qu'il n'existe pas d'application $f : M \to \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$.

3– Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes ; on suppose que Q est non nul.
–Montrer que P/Q induit une application C^∞ $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
–Calculer $\deg(f)$.

2. Courbure de Gauss

1– Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).

3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$.

4– Montrer qu'on peut trouver une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ difféomorphe à $\mathbb{S}^2$ qui possède un point de courbure de Gauss nulle.

3. Applications de la sphère dans elle-même

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3– Soit $x \in \mathbb{S}^n$ et $U \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ et une application C^∞ $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tels que f réalise un difféomorphisme entre V et $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, et que $f(\mathbb{S}^n \setminus V) = \{x\}$.

4– Soit $d \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même.

5– Supposons n impair. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier pair. Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même telle que $f(-x) \neq -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$.

4. Champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$

1– Soit $i \in \mathbb{Z}$. Construire un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ s'annulant en l'origine et seulement en l'origine, et d'indice i en l'origine.

2– On considère $\mathbb{S}^2$ comme réunion de $\mathbb{R}^2$ et du point à l'infini ∞. Considérons un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et qui est d'indice i en 0. Quel est son indice en ∞ ?

5. Une surface de genre 2

Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, et de son produit scalaire usuel. Soit M le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (16 - x^2 - y^2)((x-2)^2 + y^2 - 1)((x+2)^2 + y^2 - 1) = z^2\}\,.$$

1– Montrer que M est une variété compacte de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 2.

2– Montrer que l'intersection de M avec chacun des plans de coordonnées (d'équation respective $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$) est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 1. Donner le nombre de composantes connexes.

3– Pour tout u dans M on note $X(u)$ et $Z(u)$ la projection orthogonale sur T_uM de respectivement $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$. Montrer que ce sont deux champs de vecteurs de classe C^∞ sur M et trouver les points de M où ils s'annulent.

4– On considère Γ le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^3$ engendré par le retournement le long de l'axe des x (c'est à dire $(x,y,z) \to (x,-y,-z)$). Montrer que Γ préserve M et que l'espace topologique quotient $\Gamma \backslash M$ est une variété topologique.

5– Montrer qu'au voisinage des points $(1,0,0)$ et $(3,0,0)$ dans M, il existe une carte locale (U,φ) à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que, en tout point (x,y) de cet ouvert, on a $\varphi_*(X_{|U}) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

6– Montrer que si ψ_t est le flot local de X, alors on a pour tout $(0,y,z) \in M$ avec $y \neq 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t(0,y,z) = (4,0,0)\,.$$

7– Montrer que M est homéomorphe à l'espace topologique obtenu en recollant à partir de deux copies du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ privée du disque $B(0,\frac{1}{3})$, en les recollant par l'identité le long des cercles bords de ces disques. Montrer que $\Gamma \backslash M$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.