Géométrie Différentielle, TD 8 du 10 avril 2012

1. Surfaces à g trous

Soient $g, k \geqslant 0$ des entiers. Soit T_g l'unique surface connexe compacte orientable « à g trous ». On note $T_{g,k}$ la variété obtenue en enlevant k points distincts à T_g.

1– Montrer que $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$.

2– Calculer $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$ pour $k \geqslant 0$.

3– Calculer $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$.

4– Calculer $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$.

5– Soit $k \geqslant 2$. Calculer $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$, $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$, et montrer que si $\mathbb{S}^1 \subset T_{1,k}$ est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle.

6– Calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$ pour $g, k \geqslant 0$.

7– En déduire que si $g \neq g'$, T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Montrer que si $(g, k) \neq (g', k')$, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ne sont pas homéomorphes.

Solution :

1– $\dim H^0(T_g, \mathbb{R}) = 1$ car T_g est connexe. $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ par dualité de Poincaré, car T_g est compacte orientable.

2– La variété T_0 est la sphère. Sa cohomologie a été calculée en cours : $H^1(T_0) = 0$.

Si $k \geqslant 1$, la variété $T_{0,k}$ est le plan privé de $k-1$ points. On peut appliquer Mayer-Vietoris à un recouvrement constitué de deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection a k composantes connexes homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Il vient $\dim H^1(T_{0,k}) = k - 1$ et $\dim H^2(T_{0,k}) = 0$.

3– La variété T_1 est le tore. On peut trouver un recouvrement par deux ouverts U et V qui sont des cylindres dont l'intersection est la réunion de deux cylindres. Comme un cylindre se rétracte par déformation sur un cercle, il a les mêmes groupes de cohomologie que le cercle. Appliquant alors Mayer-Vietoris, et utilisant le fait que $H^2(T_1) = \mathbb{R}$ par dualité de Poincaré, il vient : $H^1(T_1) = \mathbb{R}^2$.

4– On peut recouvrir $T_{1,1}$ par deux ouverts se rétractant par déformation sur un cercle, dont l'intersection est contractile. Mayer-Vietoris montre alors que $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R}) = 2$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R}) = 0$.

5– Si $k \geqslant 2$, on recouvre $T_{1,k-1}$ par un ouvert homéomorpheà $T_{1,k}$ et un ouvert contractile, dont l'intersection se rétracte sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Appliquant Mayer-Vietoris, on montre par récurrence sur k que $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R}) = k + 1$ et $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R}) = 0$ pour $k \geqslant 1$.

De plus, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ apparaît dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, qui montre qu'elle est surjective, donc non nulle.

6– On va montrer par récurrence sur g que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$, et que $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$ si $k \geqslant 1$. On peut supposer $g \geqslant 2$.

On peut recouvrir $T_{g,k}$ par deux ouverts homéomorphes à $T_{1,1}$ et à $T_{g-1,k+1}$, d'intersection se rétractant sur le cercle, et considérer la suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée. Si $k = 0$, la connaissance de $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ permet de calculer $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$. Si $k \geqslant 1$, on remarque que le même argument qu'à la question précédente montre que la flèche $H^1(T_{g-1,k+1}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle. Ceci permet d'utiliser la suite exacte longue pour calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$.

7– Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie, de sorte que deux variétés homéomorphes ont mêmes groupes de cohomologie. Mais, la question précédente montre que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) \neq \dim H^1(T_{g'}, \mathbb{R})$ si $g \neq g'$: T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Supposons que $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ soient homéomorphes.

La valeur de k est déterminée par l'espace topologique $T_{g,k}$: c'est son « nombre de bouts ». Plus précisément, c'est le plus petit entier tel que l'énoncé suivant soit vrai : si $K \subset$ est un compact, il existe un compact $K \subset K' \subset T_{g,k}$ tel que $T_{g,k} \setminus K'$ ait exactement k composantes connexes. Ainsi $k = k'$.

Comme les groupes de cohomologie sont un invariant topologique, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ont un H^1 de même dimension, et les questions précédentes montrent que $g = g'$.

2. Cohomologie des tores

On note $M_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n. L'espace $\Omega^p(M_n)$ s'identifie aux p-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ invariantes par translation par $\mathbb{Z}^n$. On note Ω^p_{const} le sous-espace constitué des formes invariantes par toutes les translations.

1– Soit $\alpha \in \Omega^p_{const}$. Montrer que α est une forme fermée. En déduire une application linéaire $u : \Omega^p_{const} \to H^p(M_n, \mathbb{R})$.

2– Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note τ_x la translation par x. Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\tau_x^*\alpha - \alpha$ est exacte.

3– Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\int_{[0,1]^n} \tau_x^*\alpha dx - \alpha$ est exacte.

4– En déduire que u est surjective.

5– Montrer que u est injective.

6– Calculer $\dim H^p(M_n, \mathbb{R})$.

Solution :

1– Sur $\mathbb{R}^n$, α est une forme à coefficients constants. Les dérivées partielles des coefficients sont donc nulles, et $d\alpha = 0$. On dispose ainsi d'une application $u : \Omega^p_{const} \to H^p(M_n, \mathbb{R})$ qui consiste à prendre la classe de cohomologie.

2– L'application τ_x est homotope à Id via $t \mapsto \tau_{tx}$. Ainsi, τ_x induit l'identité en cohomologie. On en déduit que les classes de cohomologie de α et de $\tau_x^*\alpha$ sont égales, i.e. que $\tau_x^*\alpha - \alpha$ est exacte.

3– La preuve (dans le cours) que des applications homotopes induisent la même application en cohomologie permet en fait de construire une forme β_x explicite telle que $\tau_x^*\alpha - \alpha = d\beta_x$. Plus précisément, notant $f_x : M_n \times [0,1] \to M_n$ donnée par $f_x(y,t) = y + tx$, on a $\tau_x^*\alpha - \alpha = d\beta_x$ avec $\beta_x = \int_0^1 \tau_{tx}^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} f_x^* \alpha dt$. Intégrant sur $x \in [0,1]$, puis intervertissant cette intégrale et la différentielle extérieure (ce qui est légitime, car les dérivées partielles des coefficients de α sont continues et $\mathbb{Z}^n$-périodiques sur $\mathbb{R}^n$, donc bornées), on obtient $\int_{[0,1]^n} \tau_x^* \alpha dx - \alpha = d\beta$ avec $\beta = \int_{[0,1]^n} \int_0^1 \tau_{tx}^* i_{\frac{\partial}{\partial t}} f_x^* \alpha dt dx$. Bien sûr, ce sont encore les théorèmes d'interversion entre dérivée et intégrale qui assurent que β est C^∞.

4– Considérons une classe de cohomologie de $H^p(M_n, \mathbb{R})$, représentée par une forme fermée α. La question précédente montre qu'elle est représentée par $\int_{[0,1]^n} \tau_x^* \alpha dx$, qui appartient à Ω^p_{const}, comme voulu.

5– Soit $\alpha \in \Omega^p_{const}$ non nulle. Quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que le coefficient C en $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ dans α est constant non nul. Notons $M_p = \mathbb{R}^p / \mathbb{Z}^p$: c'est une sous-variété de M_n. La forme $\alpha|_{M_p}$ est une forme de degré maximal. On calcule $\int_{M_p} \alpha|_{M_p} = C \neq 0$. En particulier, par Stokes, $\alpha|_{M_p}$ ne peut être exacte, donc α n'était pas exacte : $u(\alpha) \neq 0$. Ceci monte que u, de noyau trivial, est injective.

6– On a donc $\dim H^p(M_n, \mathbb{R}) = \dim \Omega^p_{const} = \dim \bigwedge^p \mathbb{R}^{n,*} = \binom{n}{p}$.

3. Cohomologie de l'espace projectif complexe

Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, soit $j_k : \mathbb{C}^N \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ définie par $j_k(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) = [x_0 : \dots : x_{k-1} : 1 : x_{k+1} : \dots : x_N]$, et notons $U_k = j_k(\mathbb{C}^N)$.

1– Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de l'ouvert $U_0 \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)$?

2– Soit I une partie non vide de $\{0, \dots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de $V_I := \bigcup_{k \in I} U_k$?

3– Quelle est la cohomologie de de Rham de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$? Que vaut sa caractéristique d'Euler-Poincaré ?

4– Quand $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe à $\mathbb{S}^{2N}$?

Solution :

1– On a $j_0^{-1}(U_i) = \{(x_1, \dots, x_N) \mid x_i \neq 0\}$. Ainsi, $j_0^{-1}(U_1 \cup \dots \cup U_k) = (\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{N-k}$. Cet ouvert se rétracte sur la sphère $\mathbb{S}^{2k-1}$, donc $H^i(U_0 \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)) = \mathbb{R}$ si $i = 0$ ou $2k-1$, et 0 sinon.

2– On montre par récurrence sur la longueur de I que $H^i(V_I) = \mathbb{R}$ pour $i = 0, 2, \dots, 2|I|-2$, et 0 sinon. Le résultat est clair pour $|I| = 1$. Soit $I = \{0, \dots, k\}$, posons $J = \{1, \dots, k\}$. On écrit la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à U_0 et V_J. Pour tout entier i, on a $H^{2i+1}(U_0) = H^{2i+1}(V_J) = 0$. On obtient donc la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) \to H^{2i}(U_0 \cup V_J) \to H^{2i}(U_0) \oplus H^{2i}(V_J) \\ \to H^{2i}(U_0 \cap V_J) \to H^{2i+1}(U_0 \cup V_J) \to 0. \end{aligned}$$

Pour $i = 0$, $U_0 \cup V_J$ est connexe donc $H^0(U_0 \cup V_J) = \mathbb{R}$, ce qui donne $H^1(U_0 \cup V_J) = 0$. Pour $i > 0$, on a $H^{2i}(U_0 \cap V_J) = 0$ d'après la question précédente, donc $H^{2i+1}(U_0 \cup V_J) = 0$ et

$$0 \to H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) \to H^{2i}(U_0 \cup V_J) \to H^{2i}(U_0) \oplus H^{2i}(V_J) \to 0.$$

Si $i < k$, on a $H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) = 0$, $H^{2i}(U_0) = 0$ et $H^{2i}(V_J) = \mathbb{R}$, donc $H^{2i}(U_0 \cup V_J) = \mathbb{R}$. Si $i > k$, on trouve de même $H^{2i}(U_0 \cup V_J) = 0$. Finalement, pour $i = k$, on a $H^{2i-1}(U_0 \cap V_J) = \mathbb{R}$ et $H^{2i}(U_0) \oplus H^{2i}(V_J) = 0$, donc $H^{2i}(U_0 \cup V_J) = \mathbb{R}$. Cela conclut la récurrence.

3– En prenant $I = \{0, \dots, N\}$, on obtient $V_I = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Ainsi, $H^i(\mathbb{P}^N(\mathbb{C})) = \mathbb{R}$ si i est pair et $0 \leqslant i \leqslant 2N$, et 0 sinon. Par conséquent, $\chi(\mathbb{P}^N(\mathbb{C})) = N + 1$.

4– La question précédente montre que si $N \neq 1$, $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et $\mathbb{S}^{2N}$ n'ont pas les mêmes groupes de cohomologie de De Rham, et ne sont donc pas homéomorphes. Si $N = 1$, la projection stéréographique réalise un difféomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

4. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ne sont pas homéomorphes.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Dans cet exercice les formes différentielle sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$.

2– On note $[z_0 : \ldots : z_n]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, on note U_p l'ouvert des $[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tels que z_p est non nul.

   1– Pour tous p, j dans $\{0, \ldots, n\}$, on note $u_{p,j} : U_p \to \mathbb{C}$ l'application $[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto z_j/z_p$, et $\varphi_p : U_p \to \mathbb{C}$ l'application $[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto \sum_{j=o}^n |z_j/z_p|^2$. Montrer que ces applications sont de classe C^∞.

   2– Soit
$$\omega_p = \frac{i}{\varphi_p} \sum_{j=0}^n du_{p,j} \wedge d\overline{u_{p,j}} - \frac{i}{\varphi_p^2} \sum_{j,k=0}^n u_{p,j}\overline{u_{p,k}} du_{p,k} \wedge d\overline{u_{p,j}} \ .$$
   Montrer qu'il existe une 2-forme différentielle ω de classe C^∞ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ telle que $\omega_{|U_p} = \omega_p$ pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$.

   3– Montrer que ω est fermée.

   4– On définit $\omega^1 = \omega$, et par récurrence, $\omega^m = \omega^{m-1} \wedge \omega$ pour tout entier $m \geqslant 2$. Montrer que ω^n est une forme volume sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

   5– Montrer que ω n'est pas exacte, et que sa classe de cohomologie dans $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ engendre (en tant qu'algèbre réelle) $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.

6– En déduire que les variétés $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ne sont pas homéomorphes.

Solution :

On renvoie à la correction de l'exercice 167 du polycopié.

Donnons des précisions pour la question 2.2 :

2.2 : On a pour $q \neq p$, sur $U_p \cap U_q$: $u_{p,j} = u_{p,q}u_{q,j}$.

Donc $\varphi_p = |u_{p,q}|^2\varphi_q$ et $du_{p,j} = u_{p,q}du_{q,j} + u_{q,j}du_{p,q}$. On en déduit la formule suivante :

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \frac{i}{\varphi_p}\sum_{j=0}^n du_{p,j} \wedge d\overline{u_{p,j}} &&= \frac{i}{\varphi_q}\sum_{j=0}^n du_{q,j} \wedge d\overline{u_{q,j}} \\
&(2) && + \frac{i\varphi_q}{\varphi_p} du_{p,q} \wedge d\overline{u_{p,q}} \\
&(3) && + \frac{i}{\varphi_p}\sum_{j=0}^n (u_{p,q}\overline{u_{q,j}} du_{q,j} \wedge d\overline{u_{p,q}} + u_{q,j}\overline{u_{p,q}} du_{p,q} \wedge d\overline{u_{q,j}})
\end{aligned}$$

Pour l'autre terme, on calcule

$$u_{p,j}\overline{u_{p,k}}du_{p,k} \wedge d\overline{u_{p,j}} = |u_{p,q}|^4 u_{q,j}\overline{u_{q,k}}du_{q,k} \wedge d\overline{u_{q,j}} \tag{4}$$

$$+|u_{p,q}|^2|u_{q,j}|^2|u_{q,k}|^2 du_{p,q} \wedge d\overline{u_{p,q}} \tag{5}$$

$$+|u_{p,q}|^2|u_{q,j}|^2 u_{p,q}\overline{u_{q,k}}du_{q,k} \wedge d\overline{u_{p,q}} \tag{6}$$

$$+|u_{p,q}|^2|u_{q,k}|^2 u_{q,j}\overline{u_{p,q}}du_{p,q} \wedge d\overline{u_{q,j}} \tag{7}$$

Ensuite on somme sur k et j et on multiplie par $\frac{-i}{(\varphi_p)^2}$: le premier terme est

$$\frac{-i}{\varphi_q^2}\sum_{j,k=0}^{n} u_{q,j}\overline{u_{q,k}}du_{q,k} \wedge d\overline{u_{q,j}}$$

qui est celui qu'on cherche.

Le deuxième terme est : $-i|u_{p,q}|^2\frac{\varphi_q^2}{\varphi_p^2}du_{p,q} \wedge d\overline{u_{p,q}} = \frac{-i\varphi_q}{\varphi_p}du_{p,q} \wedge d\overline{u_{p,q}}$ et se simplifie avec la somme sur la ligne (2).

Enfin les deux derniers termes donnent :

$$\frac{-i}{\varphi_p}\sum_{k=0}^{n} u_{p,q}\overline{u_{q,k}}du_{q,k} \wedge d\overline{u_{p,q}} + \frac{-i}{\varphi_p}\sum_{j=0}^{n} u_{q,j}\overline{u_{p,q}}du_{p,q} \wedge d\overline{u_{q,j}}$$

. Cela se simplifie avec la ligne (3).

On a donc bien monté que $\omega_p = \omega_q$ sur $U_p \cap U_q$.