

## Géométrie Différentielle, TD 8 du 10 avril 2012

### 1. Surfaces à $g$ trous

---

Soient  $g, k \geq 0$  des entiers. Soit  $T_g$  l'unique surface connexe compacte orientable « à  $g$  trous ». On note  $T_{g,k}$  la variété obtenue en enlevant  $k$  points distincts à  $T_g$ .

- 1- Montrer que  $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$  et  $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ .
- 2- Calculer  $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$  et  $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$  pour  $k \geq 0$ .
- 3- Calculer  $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$ .
- 4- Calculer  $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$  et  $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$ .
- 5- Soit  $k \geq 2$ . Calculer  $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$ ,  $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$ , et montrer que si  $S^1 \subset T_{1,k}$  est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite  $H^1(T_{1,k}) \rightarrow H^1(S^1)$  est non nulle.
- 6- Calculer  $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$  et  $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$  pour  $g, k \geq 0$ .
- 7- En déduire que si  $g \neq g'$ ,  $T_g$  et  $T_{g'}$  ne sont pas homéomorphes.
- 8- Montrer que si  $(g, k) \neq (g', k')$ ,  $T_{g,k}$  et  $T_{g',k'}$  ne sont pas homéomorphes.

### 2. Cohomologie des tores

---

On note  $M_n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  le tore de dimension  $n$ . L'espace  $\Omega^p(M_n)$  s'identifie aux  $p$ -formes différentielles sur  $\mathbb{R}^n$  invariantes par translation par  $\mathbb{Z}^n$ . On note  $\Omega_{const}^p$  le sous-espace constitué des formes invariantes par toutes les translations.

- 1- Soit  $\alpha \in \Omega_{const}^p$ . Montrer que  $\alpha$  est une forme fermée. En déduire une application linéaire  $u : \Omega_{const}^p \rightarrow H^p(M_n, \mathbb{R})$ .
- 2- Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\tau_x$  la translation par  $x$ . Soit  $\alpha \in \Omega^p(M_n)$  une forme fermée. Montrer que  $\tau_x^* \alpha - \alpha$  est exacte.
- 3- Soit  $\alpha \in \Omega^p(M_n)$  une forme fermée. Montrer que  $\int_{[0,1]^n} \tau_x^* \alpha dx - \alpha$  est exacte.
- 4- En déduire que  $u$  est surjective.
- 5- Montrer que  $u$  est injective.
- 6- Calculer  $\dim H^p(M_n, \mathbb{R})$ .

### 3. Cohomologie de l'espace projectif complexe

---

Pour tout  $k \in \{0, \dots, N\}$ , soit  $j_k : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  définie par  $j_k(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) = [x_0 : \dots : x_{k-1} : 1 : x_{k+1} : \dots : x_N]$ , et notons  $U_k = j_k(\mathbb{C}^N)$ .

- 1– Soit  $k \in \{1, \dots, N\}$ . Quelle est la cohomologie de de Rham de l'ouvert  $U_0 \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k)$  ?
- 2– Soit  $I$  une partie non vide de  $\{0, \dots, N\}$ . Quelle est la cohomologie de de Rham de  $V_I := \bigcup_{k \in I} U_k$  ?
- 3– Quelle est la cohomologie de de Rham de  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  ? Que vaut sa caractéristique d'Euler-Poincaré ?
- 4– Quand  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  est-il homéomorphe à  $\mathbb{S}^{2N}$  ?

### 4. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ne sont pas homéomorphes.

---

Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Dans cet exercice les formes différentielle sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

- 1– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^4$  et  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ .
- 2– On note  $[z_0 : \dots : z_n]$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Pour  $0 \leq p \leq n$ , on note  $U_p$  l'ouvert des  $[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  tels que  $z_p$  est non nul.

1– Pour tous  $p, j$  dans  $\{0, \dots, n\}$ , on note  $u_{p,j} : U_p \rightarrow \mathbb{C}$  l'application  $[z_0 : \dots : z_n] \mapsto z_j/z_p$ , et  $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$  l'application  $[z_0 : \dots : z_n] \mapsto \sum_{j=0}^n |z_j/z_p|^2$ . Montrer que ces applications sont de classe  $C^\infty$ .

2– Soit

$$\omega_p = \frac{i}{\varphi_p} \sum_{j=0}^n du_{p,j} \wedge d\overline{u_{p,j}} - \frac{i}{\varphi_p^2} \sum_{j,k=0}^n u_{p,j} \overline{u_{p,k}} du_{p,k} \wedge d\overline{u_{p,j}}.$$

Montrer qu'il existe une 2-forme différentielle  $\omega$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  telle que  $\omega|_{U_p} = \omega_p$  pour tout  $0 \leq p \leq n$ .

- 3– Montrer que  $\omega$  est fermée.
- 4– On définit  $\omega^1 = \omega$ , et par récurrence,  $\omega^m = \omega^{m-1} \wedge \omega$  pour tout entier  $m \geq 2$ . Montrer que  $\omega^n$  est une forme volume sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .
- 5– Montrer que  $\omega$  n'est pas exacte, et que sa classe de cohomologie dans  $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$  engendre (en tant qu'algèbre réelle)  $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ .
- 6– En déduire que les variétés  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$  et  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  ne sont pas homéomorphes.