Géométrie Différentielle, TD 9 du 13 avril 2012

1. Cohomologie de l'espace projectif réel

Soit Γ un groupe fini opérant librement par difféomorphismes sur une variété C^∞ X, soit Y la variété quotient et $p : X \to Y$ l'application quotient. On admettra la question 1, qui est l'exercice 1 du TD5.

1– Montrer que pour tout k l'application p^* définit un isomorphisme :

$$\Omega^k(Y) \to \Omega^k(X)^\Gamma$$

2– Montrer que $p^* : H^k(Y) \to H^k(X)$ est injective.

3– Montrer que l'image de p^* est formée des classes de cohomologie Γ-invariantes.

4– Calculer la cohomologie des espaces projectifs réels $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 1$.

Solution :

1– L'image de p^* est incluse dans $\Omega^k(X)^\Gamma$ car pour tout $\gamma \in \Gamma$, $p \circ \gamma = p$.

Supposons $p^*\omega = 0$. Soit $y \in Y$ et x un antécédent de y par p. Soient $e_1, \dots, e_k$ des vecteurs tangents à Y en y. Comme p est un difféomorphisme local, $T_x p$ est un isomorphisme et on calcule :

$$\omega_y(e_1, \dots, e_k) = p^*\omega_x((T_x p)^{-1}(e_1), \dots, (T_x p)^{-1}(e_1)) = 0,$$

ce qui montre $\omega = 0$. L'application p^* est donc injective.

Soit $\omega \in \Omega^k(X)^\Gamma$. On définit $\sigma \in \Omega^k(y)$ de la manière suivante : soit $y \in Y$. On choisit x un antécédent de y par p et on pose $\sigma_y(e_1, \dots, e_k) = \omega_x((T_x p)^{-1}(e_1), \dots, (T_x p)^{-1}(e_1))$. L'invariance de ω sous Γ montre que cette définition ne dépend pas du choix de x. Montrons que σ est une forme C^∞. Pour cela, comme p est un difféomorphisme local, on choisit un voisinage U de x et un voisinage V de y tel que $p|_U$ réalise un difféomorphisme de U sur V. Alors notre construction est telle que $\sigma|_V = ((p|_U)^{-1})^*(\omega|_U)$ et cette expression montre que σ est C^∞ au voisinage de y. Comme, par construction, $p^*\sigma = \omega$, on a montré la surjectivité de p^*.

2– Soit une $c \in H^k(Y)$ telle que $p^*c = 0$. On choisit une forme différentielle fermée ω représentant c. L'hypothèse est que $p^*\omega$ est exacte : il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(X)$ telle que $p^*\omega = d\alpha$. Posons $\alpha' = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^*\alpha$. On calcule :

$$d\alpha' = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* d\alpha = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* p^*\omega = p^*\omega$$

car $p^*\omega$ est Γ-invariante. L'expression de α' montre que α' est Γ-invariante. Par la question précédente, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}(Y)$ telle que $p^*\beta = \alpha'$. On a alors $p^*(\omega - d\beta) = p^*\omega - d\alpha' = 0$ donc la question précédente montre que $\omega = d\beta$ est exacte. Ainsi, $c = 0$.

3– L'image de p^* est constituée de classes de cohomologie Γ-invariantes par fonctorialité de la cohomologie et car $p \circ \gamma = p$ pour $\gamma \in \Gamma$. Réciproquement, soit $c \in H^k(X)$ une classe de cohomologie Γ-invariante. On choisit ω une forme fermée représentant c. Posons $\omega' = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* \omega$. Alors ω' représente aussi la classe de cohomologie c par Γ-invariance de c. Son expression montre que ω' est Γ-invariante. La première question montre alors qu'il existe $\alpha \in \Omega^k(Y)$ telle que $p^*\alpha = \omega'$. Comme $p^* d\alpha = dp^*\alpha = d\omega' = 0$ et que p^* est injective, α est fermée. la classe de cohomologie c' qu'elle représente est bien telle que $p^*c' = c$. Ceci montre que l'image de p^* contient toutes les classes de cohomologie Γ-invariantes, et conclut.

4– On pose $X = \mathbb{S}^n$, $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant par l'antipodie f et $Y = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ le quotient. On applique les résultats précédents. La sphère n'a que deux groupes de cohomologie non triviaux : $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ et $H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$. L'antipodie agit par l'identité sur le premier car on peut choisir comme représentants de ces classes de cohomologie les fonctions constantes. L'action sur le second est la multiplication par le degré de l'antipodie f. Celui-ci est 1 quand f préserve l'orientation et -1 sinon. Or l'antipodie préserve l'orientation de $\mathbb{S}^n$ si et seulement si n est impair.

   On peut alors appliquer la question précédente : $H^i(\mathbb{S}^n)$ est nul sauf si $i = 0$ ou si $i = n$ et n est impair. auquelcas il est de dimension 1.

2. Revêtement des orientations et cohomologie

Soit M une variété C^∞ compacte connexe non orientable de dimension n. On note $\widetilde{M}$ l'ensemble des couples (x, o) où $x \in M$ et o est une orientation de T_xM.

1– Munir $\widetilde{M}$ d'une structure de variété C^∞ compacte orientable.

2– Montrer que $\widetilde{M}$ est connexe.

3– Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\widetilde{M}$ par changement d'orientation. Montrer que M est le quotient de $\widetilde{M}$ par cette action.

4– Montrer que $H^n(M, \mathbb{R}) = 0$.

Solution :

3. Surfaces non orientables

Soit U_g la somme connexe de $g + 1$ copies de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. En particulier, $U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1– Montrer que U_g est une surface compacte connexe non orientable.

2– Montrer que $\dim H^0(U_g, \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H^2(U_g, \mathbb{R}) = 0$.

3– Calculer $\dim H^1(U_g, \mathbb{R})$ pour $g \geqslant 0$.

4– En déduire que si $g \neq g'$, U_g et $U_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

Solution :

1– U_g est bien une surface. La construction de la somme connexe montre que la somme connexe de deux variétés connexes est connexe, de sorte que U_g est connexe. La construction de la somme connexe montre que la somme connexe de deux variétés compactes est compacte (car réunion de deux compacts), de sorte que U_g est compacte.

Par construction, U_g contient une variété difféomorphe $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'un point, i.e. la bande de Möbius, qui n'est pas orientable. Ainsi, U_g ne peut être orientable.

2– $\dim H^0(U_g, \mathbb{R}) = 1$ car U_g est connexe. $\dim H^2(U_g, \mathbb{R}) = 0$ par dualité de Poincaré, car U_g est compacte non orientable.

3– La cohomologie $U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a été calculée dans l'exercice précédent : $H^1(U_0) = 0$. Montrons par récurrence sur g que $\dim H^1(U_g, \mathbb{R}) = g$.

Notons U_g' la variété obtenue en enlevant un point à U_g. En considérant un recouvrement de U_g par U_g' et un petit disque, dont l'intersection est une couronne se rétractant sur un cercle, et appliquant Mayer-Vietoris, on montre que $\dim H^1(U_g', \mathbb{R}) = g + 1$.

Enfin, en considérant un recouvrement de U_{g+1} par deux ouverts difféomorphes à U_g' et U_0', dont l'intersection est une couronne se rétractant sur un cercle, et appliquant Mayer-Vietoris, on montre que $\dim H^1(U_{g+1}, \mathbb{R}) = g + 1$. Cela conclut la récurrence.

4– Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie, de sorte que deux variétés homéomorphes ont mêmes groupes de cohomologie. Mais, la question précédente montre que $\dim H^1(U_g, \mathbb{R}) \neq \dim H^1(U_{g'}, \mathbb{R})$ si $g \neq g'$: U_g et $U_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

4. Cohomologie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux fermés strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$. Si A et B sont homéomorphes, on va montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, H^p(\mathbb{R}^n \backslash A) \simeq H^p(\mathbb{R}^n \backslash B).$$

1– Si A est un fermé de $\mathbb{R}^n$, on peut le considérer comme un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ en utilisant le plongement $x \mapsto (x, 0)$. Montrer alors que

$$H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \backslash A) \simeq H^p(\mathbb{R}^n \backslash A), \text{ pour } p \geqslant 1.$$
$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \backslash A) \simeq H^0(\mathbb{R}^n \backslash A)/\mathbb{R}, \text{ et } H^0(\mathbb{R}^{n+1} \backslash A) \simeq \mathbb{R}.$$

2– Démontrer ou admettre le théorème de Tietze-Urysohn :

Si A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^m$ est une application continue, alors il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $g_{|A} = f$.

3– Considérons un fermé A de $\mathbb{R}^n$, un fermé B de $\mathbb{R}^m$ et supposons qu'il existe un homéomorphisme φ entre A et B. Montrer qu'il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{R}^{n+m}$ tel que $h(x, 0_m) = (0_n, \varphi(x))$ pour tout $x \in A$.

4– En déduire que tout homéomorphisme entre deux fermés de $\mathbb{R}^n$ se prolonge à un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$. Conclure.

Solution :

1– Soient $U = \mathbb{R}^{n+1}\backslash(A \times [0,\infty[)$ et $V = \mathbb{R}^{n+1}\backslash(A\times]-\infty,0])$. Calculons la cohomologie de U (et de V). L'identité de U est homotope à l'application $(x,z) \mapsto (x,-1)$ (par $F(x,z,t) = (x,-1+t(z-1)))$, elle-même homotope à $(x,z) \mapsto (0,-1)$ (par $G(x,z,t) = (tx,-1)$). Ainsi, la cohomologie de U est égale à celle du point.

Comme $U \cap V = \mathbb{R}^{n+1}\backslash A \times \mathbb{R}$, l'identité de $U \cap V$ est homotope à l'application $(x,z) \mapsto (x,0)$. Ainsi, le plongement de A dans $U \cap V$ est un isomorphisme en cohomologie.

Finalement, $U \cup V = \mathbb{R}^{n+1}\backslash A$. On écrit alors la suite exacte de Mayer-Vietoris. Pour $p \geqslant 1$, comme $H^p(U) \oplus H^p(V) = 0$ et $H^{p+1}(U) \oplus H^{p+1}(V) = 0$, on trouve que $H^p(U \cap V) \simeq H^{p+1}(U \cup V)$, i.e. $H^p(\mathbb{R}^n\backslash A) \simeq H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A)$. En petit degré, la suite exacte donne

$$0 \to H^0(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \to \mathbb{R}^2 \to H^0(\mathbb{R}^n\backslash A) \to H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \to 0.$$

Mais $\mathbb{R}^{n+1}\backslash A$ est connexe, donc $H^0(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \simeq \mathbb{R}$. La suite exacte ci-dessus donne donc $H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \simeq H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}$.

2– On utilisera le lemme suivant :

Lemme 1. *Soient F et G deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $[0,1]$ qui vaut 0 au voisinage de F et 1 au voisinage de G.*

*Démonstration.*Soit $F' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,F) \leqslant \frac{1}{2}d(x,G)\}$ et $G' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,G) \leqslant \frac{1}{2}d(x,F)\}$: ce sont deux fermés disjoints qui sont des voisinages respectivement de F et G. Soit alors $f(x) = \frac{d(x,F')}{d(x,F')+d(x,G')}$: cette fonction convient. □

Pour démontrer le théorème, on raisonne composante par composante, et on suppose donc f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons tout d'abord f bornée, par exemple $-1 \leqslant f \leqslant 1$. Les fermés $W_1 = \{f \leqslant -\frac{1}{3}\}$ et $W_2 = \{f \geqslant \frac{1}{3}\}$ sont disjoints, donc il existe f_0 à valeurs dans $[-1/3, 1/3]$ qui vaut $-1/3$ sur W_1 et $1/3$ sur W_2. Alors $|f - f_0| \leqslant 2/3$. On réitère le procédé, et on construit ainsi des fonctions f_n avec $|f_n| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $|f - \sum_{k=0}^n f_k| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. La fonction $g = \sum f_k$ est alors un prolongement de f qui convient.

Si f n'est pas bornée, soit φ continue croissante sur $\mathbb{R}$ qui envoie $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$. En appliquant le résultat précédent à $\varphi \circ f$, puis en composant par φ^{-1}, on trouve g à valeurs dans $[-\infty,\infty]$ égale à f sur A. Soit $B = \{|g| = \infty\}$, qui est un fermé de $\mathbb{R}^n$ disjoint de A. Soit h qui vaut 1 au voisinage de A et 0 au voisinage de B, alors la fonction gh est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et prolonge f.

3– On prolonge φ en $\widetilde{\varphi}$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ (qui n'est pas nécessairement un homéomorphisme), et φ^{-1} en $\widetilde{\varphi^{-1}}$. Il suffit ensuite de prendre
$$h(x,y) = (x - \widetilde{\varphi^{-1}}(y + \widetilde{\varphi}(x)), y + \widetilde{\varphi}(x)).$$
C'est la composée de $(x,y) \mapsto (x, y + \widetilde{\varphi}(x))$ et $(x,y) \mapsto (x - \widetilde{\varphi^{-1}}(y), y)$, qui sont manifestement des homéomorphismes.

4– Cela résulte directement de la question précédente (en permutant les deux coordonnées à la fin).

Il a été démontré en cours que deux variétés homéomorphes ont même cohomologie. Ainsi, $\mathbb{R}^{2n}\backslash A$ et $\mathbb{R}^{2n}\backslash B$ ont même cohomologie. En utilisant la première question, on fait descendre progressivement la dimension, et on obtient que $\mathbb{R}^n\backslash A$ et $\mathbb{R}^n\backslash B$ ont même cohomologie.

5. Théorème de Brouwer

1– Soit A un fermé strict de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{R}^n\backslash A$ a un nombre fini k de composantes connexes. Si B est un fermé strict de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à A, montrer que $\mathbb{R}^n\backslash B$ a également k composantes connexes.

2– Démontrer le théorème de séparation de Jordan-Brouwer :

Théorème 2. *Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère S^{n-1} ($n \geqslant 2$), alors :*
–$\mathbb{R}^n\backslash\Sigma$ a exactement deux composantes connexes U_1 et U_2, où U_1 est bornée et U_2 est non bornée.
–Σ est la frontière de U_1 et de U_2.

3– Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la boule B^k de dimension $k \leqslant n$, alors $\mathbb{R}^n\backslash A$ est connexe.

4– En déduire le théorème de Brouwer :

Théorème 3. *Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et une application continue et injective f définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors l'image $f(U)$ de U par f est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un homéomorphisme entre U et $f(U)$.*

Solution :

1– Quand $H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)$ est fini, sa dimension est égale au nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^n\backslash A$. Cela implique immédiatement le résultat.

2– Par la question précédente, $\mathbb{R}^n\backslash\Sigma$ a exactement deux composantes connexes U_1 et U_2. Σ est compact, donc inclus dans une boule $B(0,M)$. Comme $\mathbb{R}^n\backslash B(0,M)$ est connexe, il rencontre exactement une des deux composantes, mettons U_2. Alors U_1 est bornée et U_2 est non bornée.

Soit $x \in \Sigma$, montrons que $x \in \overline{U_1}$, par l'absurde. Sinon, soit V un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ qui ne rencontre que $U_2 \cup \Sigma$. Soit $\Sigma' = \Sigma \backslash V$: c'est un fermé de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à un sous-ensemble strict de la sphère, donc la première question donne que $\mathbb{R}^n \backslash \Sigma'$ a exactement une composante connexe. Mais $\mathbb{R}^n \backslash \Sigma' = (U_2 \cup V) \cup U_1$: c'est une réunion de deux ouverts non vides disjoints, ce qui est absurde.

3– Clair par la première question.

4– Soit $x \in U$, et B une boule ouverte autour de x dont l'adhérence est incluse dans U. Soit $S = \partial B$, alors $\mathbb{R}^n \backslash f(S)$ a deux composantes U_1 et U_2. Comme $f(B)$ est un connexe, il est inclus soit dans U_1, soit dans U_2. S'il était inclus strictement dans une de ces deux composantes, alors $\mathbb{R}^n \backslash f(\overline{B})$ aurait deux composantes connexes, ce qui contredit la question précédente. Ainsi, $f(B)$ est égal à U_1 ou U_2, en fait U_1 puisqu'il est borné. En particulier, $f(B)$ contient un voisinage de x. Cela montre que $f(U)$ est ouvert.

De plus, l'argument précédent montre que l'image d'un ouvert par f est encore ouverte, donc f^{-1} est continue.

6. Invariance du domaine

Déduire du théorème de Brouwer les deux énoncés suivants :

1– Si V est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie induite et V est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2– Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts non vides. Si U et V sont homéomorphes alors n est égal à m.

Solution :

1– Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à V, et $\varphi : U \to V$ l'homéomorphisme correspondant. Alors le théorème de Brouwer assure que $V = \varphi(U)$ est ouvert.

2– Supposons que $n < m$, et considérons $\mathbb{R}^n$ comme une partie de $\mathbb{R}^m$ (en fait, $\mathbb{R}^n \times \{0\}$). Alors $U \subset \mathbb{R}^m$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^m$, mais il est homéomorphe à V ouvert de $\mathbb{R}^m$. C'est absurde d'après la question précédente.