Géométrie Différentielle, TD 9 du 13 avril 2012

1. Cohomologie de l'espace projectif réel

Soit Γ un groupe fini opérant librement par difféomorphismes sur une variété C^∞ X, soit Y la variété quotient et $p : X \to Y$ l'application quotient. On admettra la question 1, qui est l'exercice 1 du TD5.

1– Montrer que pour tout k l'application p^* définit un isomorphisme :

$$\Omega^k(Y) \to \Omega^k(X)^\Gamma$$

2– Montrer que $p^* : H^k(Y) \to H^k(X)$ est injective.

3– Montrer que l'image de p^* est formée des classes de cohomologie Γ-invariantes.

4– Calculer la cohomologie des espaces projectifs réels $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 1$.

2. Revêtement des orientations et cohomologie

Soit M une variété C^∞ compacte connexe non orientable de dimension n. On note $\widetilde{M}$ l'ensemble des couples (x, o) où $x \in M$ et o est une orientation de T_xM.

1– Munir $\widetilde{M}$ d'une structure de variété C^∞ compacte orientable.

2– Montrer que $\widetilde{M}$ est connexe.

3– Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\widetilde{M}$ par changement d'orientation. Montrer que M est le quotient de $\widetilde{M}$ par cette action.

4– Montrer que $H^n(M, \mathbb{R}) = 0$.

3. Surfaces non orientables

Soit U_g la somme connexe de $g + 1$ copies de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. En particulier, $U_0 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1– Montrer que U_g est une surface compacte connexe non orientable.

2– Montrer que $\dim H^0(U_g, \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H^2(U_g, \mathbb{R}) = 0$.

3– Calculer $\dim H^1(U_g, \mathbb{R})$ pour $g \geqslant 0$.

4– En déduire que si $g \neq g'$, U_g et $U_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

4. Cohomologie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^n$ deux fermés strictement inclus dans $\mathbb{R}^n$. Si A et B sont homéomorphes, on va montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, H^p(\mathbb{R}^n \backslash A) \simeq H^p(\mathbb{R}^n \backslash B).$$

1– Si A est un fermé de $\mathbb{R}^n$, on peut le considérer comme un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ en utilisant le plongement $x \mapsto (x, 0)$. Montrer alors que
$$H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \simeq H^p(\mathbb{R}^n\backslash A), \text{ pour } p \geqslant 1.$$
$$H^1(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \simeq H^0(\mathbb{R}^n\backslash A)/\mathbb{R}, \text{ et } H^0(\mathbb{R}^{n+1}\backslash A) \simeq \mathbb{R}.$$

2– Démontrer ou admettre le théorème de Tietze-Urysohn :

Si A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^m$ est une application continue, alors il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que $g_{|A} = f$.

3– Considérons un fermé A de $\mathbb{R}^n$, un fermé B de $\mathbb{R}^m$ et supposons qu'il existe un homéomorphisme φ entre A et B. Montrer qu'il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{R}^{n+m}$ tel que $h(x, 0_m) = (0_n, \varphi(x))$ pour tout $x \in A$.

4– En déduire que tout homéomorphisme entre deux fermés de $\mathbb{R}^n$ se prolonge à un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$. Conclure.

5. Théorème de Brouwer

1– Soit A un fermé strict de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{R}^n\backslash A$ a un nombre fini k de composantes connexes. Si B est un fermé strict de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à A, montrer que $\mathbb{R}^n\backslash B$ a également k composantes connexes.

2– Démontrer le théorème de séparation de Jordan-Brouwer :

Théorème 1. *Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère S^{n-1} ($n \geqslant 2$), alors :*
–$\mathbb{R}^n\backslash\Sigma$ a exactement deux composantes connexes U_1 et U_2, où U_1 est bornée et U_2 est non bornée.
–Σ est la frontière de U_1 et de U_2.

3– Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la boule B^k de dimension $k \leqslant n$, alors $\mathbb{R}^n\backslash A$ est connexe.

4– En déduire le théorème de Brouwer :

Théorème 2. *Considérons un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et une application continue et injective f définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors l'image $f(U)$ de U par f est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un homéomorphisme entre U et $f(U)$.*

6. Invariance du domaine

Déduire du théorème de Brouwer les deux énoncés suivants :

1– Si V est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie induite et V est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2– Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts non vides. Si U et V sont homéomorphes alors n est égal à m.