Géométrie Différentielle, TD 11 du 15 mai 2013

1. Invariant de Hopf

Soit $n > 1$. On considère les sphères orientées $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{S}^{2n-1}$. Soit $f : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞.

1– Soit ω une forme volume sur $\mathbb{S}^n$ telle que $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 1$. Montrer qu'il existe une $(n-1)$-forme β sur $\mathbb{S}^{2n-1}$ telle que $f^*\omega = \mathrm{d}\beta$.

2– Montrer que le réel $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \beta \wedge \mathrm{d}\beta$ ne dépend pas du choix de β. On le note $H(f, \omega)$.

3– Montrer que $H(f, \omega)$ est en fait indépendant de ω. C'est *l'invariant de Hopf* de f. On le note $H(f)$.

4– Montrer que si n est impair, $H(f)$ est nul.

5– Déterminer $H(f)$ quand f est une application constante.
Montrer que si f et f' sont homotopes, $H(f) = H(f')$.

6– (Difficile) Soit f la fibration de Hopf, c'est à-dire l'application $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ donnée par l'équation $f(z, w) = z/w$, où l'on a identifié $\mathbb{S}^3$ à la sphère unité dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{S}^2$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Montrer que $H(f)$ est non nul. En déduire que la fibration de Hopf n'est pas homotope à une application constante.

Solution :

1– On a $\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega) = 0$. Ainsi, $f^*\omega$ est fermée sur $\mathbb{S}^{2n-1}$. Mais $H^n(\mathbb{S}^{2n-1}) = 0$. Elle est donc exacte. Il existe donc β de degré $n-1$ telle que $f^*\omega = \mathrm{d}\beta$.

2– Soit β' une autre forme différentielle telle que $\mathrm{d}\beta' = \mathrm{d}\beta$. Alors $\beta - \beta'$ est fermée. C'est une forme différentielle de degré $n-1$, et $0 < n-1 < 2n-1$ puisque $n > 1$. Comme $H^{n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) = 0$, elle est donc exacte : on peut écrire $\beta' = \beta + \mathrm{d}u$. Alors

$$\int \beta' \wedge \mathrm{d}\beta' = \int \beta \wedge \mathrm{d}\beta + \int \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta.$$

Il faut donc vérifier que $\int \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta = 0$. Mais $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}(u \wedge \mathrm{d}\beta)$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}\beta = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \mathrm{d}(u \wedge \mathrm{d}\beta) = \int_{\partial\mathbb{S}^{2n-1}} u \wedge \mathrm{d}\beta = 0,$$

puisque $\partial\mathbb{S}^{2n-1} = \emptyset$.

3– Soit ω' une autre forme volume sur $\mathbb{S}^n$ avec $\int \omega' = 1$. Alors $\int(\omega' - \omega) = 0$. Mais, par dualité de Poincaré, l'application “intégrale” est un isomorphisme entre H^n et $\mathbb{R}$, donc $\omega' - \omega$ est exacte : il existe une forme différentielle γ telle que $\omega' = \omega + \mathrm{d}\gamma$.
Soit β telle que $f^*\omega = \mathrm{d}\beta$. Alors $f^*\omega' = \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}(f^*\gamma)$. Par conséquent,

$$H(f, \omega') = \int (\beta + f^*\gamma) \wedge \mathrm{d}(\beta + f^*\gamma) = H(f, \omega) + \int f^*\gamma \wedge \mathrm{d}\beta + \int f^*\gamma \mathrm{d}(f^*\gamma) + \int \beta \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma).$$

De plus,
$$\int f^*\gamma\wedge \mathrm{d}\beta = \int f^*\gamma\wedge f^*\omega = \int f^*(\gamma\wedge\omega).$$
Comme $\gamma\wedge\omega = 0$ car c'est une forme différentielle de degré $2n-1$ sur $\mathbb{S}^n$, cette intégrale est nulle. De même, $f*\gamma\wedge \mathrm{d}(f^*\gamma) = f^*(\gamma\wedge\mathrm{d}\gamma) = 0$.
Finalement, $\mathrm{d}(\beta\wedge f^*\gamma) = \mathrm{d}\beta\wedge f^*\gamma + (-1)^{n-1}\beta\wedge\mathrm{d}(f^*\gamma)$. Comme $\mathrm{d}\beta\wedge f^*\gamma = 0$, comme ci-dessus, on obtient
$$\int \beta\wedge\mathrm{d}(f^*\gamma) = (-1)^{n-1}\int \mathrm{d}(\beta\wedge f^*\gamma) = \int_{\partial\mathbb{S}^{2n-1}} \beta\wedge f^*\gamma = 0.$$
Cela montre que $H(f,\omega) = H(f,\omega')$.

4– Si n est impair, on écrit $d(\beta\wedge\beta) = d\beta\wedge\beta + (-1)^{n-1}\beta\wedge d\beta$, de sorte que
$$2H(f) = (1+(-1)^{n-1})\int\beta\wedge d\beta = \int d(\beta\wedge\beta) = 0,$$
par le théorème de Stokes.

5– Si f est constante, $f^*\omega$ est identiquement nulle (car une n-forme différentielle sur un point est nulle), et on peut choisir $\beta = 0$. Il vient alors $H(f) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}}\beta\wedge\mathrm{d}\beta = 0$.

Si f et f' sont homotopes, elles sont aussi C^∞-homotopes, de sorte qu'il existe F : $\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{S}^n$ C^∞ coïncidant avec f pour $t\leqslant 0$ et avec f' pour $t\geqslant 1$. Soit ω une forme volume d'intégrale 1 sur $\mathbb{S}^n$. Comme $\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R}$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{S}^{2n-1}$, $H^n(\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{R}) = 0$, de sorte que $F^*\omega$ est exacte : $F^*\omega = d\beta$. Appliquons alors le théorème de Stokes à la variété à bord $\mathbb{S}^{2n-1}\times[0,1]$ et à la forme différentielle $\beta\wedge d\beta$. On prend garde à ce que la sphère $F^{-1}(0)$ est orientée négativement et à ce que la sphère $F^{-1}(1)$ est orientée positivement. Il vient :
$$\begin{aligned} H(f') - H(f) &= \int_{F^{-1}(1)}\beta\wedge\mathrm{d}\beta + \int_{F^{-1}(0)}\beta\wedge\mathrm{d}\beta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times[0,1]} d\beta\wedge d\beta \\ &= \int_{\mathbb{S}^{2n-1}\times[0,1]} F^*(\omega\wedge\omega) \\ &= 0, \end{aligned}$$
car $\omega\wedge\omega$ est nulle comme forme différentielle pour raisons de degrés. Cela conclut.

6– Soit ω une forme volume sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La variété $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\setminus\{(0,0)\}$ se rétracte sur la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à l'infini à l'aide de l'application $p_t : [z,w]\mapsto[z,tw]$, de sorte que l'application $p_0 : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un isomorphisme en cohomologie. Remarquons que $p_0|_{\mathbb{S}^3}$ est exactement la fibration de Hopf, de sorte que, pour tout $R>0$, $p_0|_{\mathbb{S}(0,R)}$ est homotope à la fibration de Hopf.

En considérant la suite de Mayer-Vietoris associée au recouvrement ouvert de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\setminus\{(0,0)\}$ et $\mathbb{C}^2$, on voit que la classe de cohomologie représentée par $p_0^*\omega$ sur

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\}$ est la restriction d'une classe de cohomologie c de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, engendrant $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Soit α une 2-forme différentielle fermée sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ représentant c. Par construction, α et $p_0^*\omega$ sont cohomologues sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\}$ de sorte qu'on y a $p_0^*\omega - \alpha = d\eta$ pour $\eta \in \Omega^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\})$.

Par description de l'algèbre de cohomologie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $c \wedge c$ est non nulle. Ainsi, par dualité de Poincaré, $\int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} \alpha \wedge \alpha = I \neq 0$. Comme $\mathbb{C}^2$ est contractile, son H^2 est nul, et α y est exacte : il existe donc $\gamma \in \Omega^2(\mathbb{C}^2)$ telle que $\alpha|_{\mathbb{C}^2} = d\gamma$.

Nous sommes enfin prêts à évaluer l'invariant de Hopf de f. Comme H est un invariant d'homotopie, $H(f) = H(p_0|_{\mathbb{S}(0,R)})$. Or, sur $\mathbb{S}(0,R)$, $p_0^*\omega = \alpha + d\eta = d(\gamma + \eta)$. Par définition de l'invariant de Hopf,

$$H(f) = H(p_0|_{\mathbb{S}(0,R)}) = \int_{\mathbb{S}(0,R)} (\gamma + \eta) \wedge (d\gamma + d\eta).$$

Comme $\int_{\mathbb{S}(0,R)} (\gamma \wedge d\eta + \eta \wedge d\gamma) = \int_{\mathbb{S}(0,R)} d(\gamma + \eta) = 0$ par le théorème de Stokes, on obtient :

$$H(f) = \int_{\mathbb{S}(0,R)} (\gamma \wedge d\gamma + \eta \wedge d\eta).$$

Remarquons que, toujours par Stokes, $\int_{\mathbb{S}(0,R)} (\gamma \wedge d\gamma) = \int_{B(0,R)} \alpha \wedge \alpha$ tend vers I quand R tend vers $+\infty$. De même, par Stokes, $\int_{\mathbb{S}(0,R)} (\eta \wedge d\eta) = \int_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus B(0,R)} d\eta \wedge d\eta$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.

Ainsi, faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient $H(f) = I \neq 0$.

L'invariance de $H(f)$ par homotopie et la nullité de l'invariant de Hopf d'une application constante montre alors que la fibration de Hopf n'est pas homotope à une application constante.

2. Cohomologie d'une grassmannienne

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Si $W \subset \mathbb{R}^4$ est un plan vectoriel, on considère $\varphi_W : \mathcal{L}(W, W^\perp) \to \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ qui, à une application linéaire $u : W \to W^\perp$, associe son graphe $\varphi_W(u) \subset W \oplus W^\perp \simeq \mathbb{R}^4$. On rappelle (exercice 5 du TD3) que les cartes (φ_W) font de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ une variété C^∞.

Soient $U \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans supplémentaires à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}^2$, $V \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ ceux supplémentaires à $\{0\}^2 \times \mathbb{R}^2$, $U' \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans ne contenant pas la droite $\mathbb{R} \times \{0\}^3$, et $V' \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans non contenus dans l'hyperplan $\{0\} \times \mathbb{R}^3$.

1– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $GL_2(\mathbb{R})$. On pourra utiliser la décomposition polaire : si S est l'ensemble des matrices symétriques définies positives, la multiplication $O_2(\mathbb{R}) \times S \to GL_2(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme.

2– Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ qui est C^∞-difféomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

3– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $U \cup V$.

4– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de U'. On pourra considérer l'application $P \mapsto (P \oplus (\mathbb{R} \times \{0\}^3))^\perp$.

5– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de V'. On pourra considérer l'application $P \mapsto P \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^3)$.

6– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$.

Solution :

1– D'après la décomposition polaire, $GL(2,\mathbb{R})$ se rétracte sur $O(2,\mathbb{R})$ qui est deux copies disointes du cercle $\mathbb{S}_1$. Donc sa cohomologie est $\mathbb{R}^2$ en degrés 0 et 1, 0 ensuite.

2– Il suffit de "lire" $U \cap V$ dans la carte $\varphi_{\mathbb{R}^2\times 0^2}$ de la grassmanienne.

3– On écrit la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à U et V. On remarque tout d'abord que U et V sont isomorphes à $M_2(\mathbb{R})$ (par les cartes locales de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ associées respectivement à $\{0\}^2 \times \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \times 0^2$. Donc leur cohomologie est celle du point. De plus $U \cup V$ est connexe.

Donc $H^0(U \cup V) = \mathbb{R}$, et pour tout $i \geqslant 2$, $H^i(U \cup V) = H^{i-1}(GL(2,\mathbb{R}))$.

Enfin, pour le degré 1, on a la suite exacte :

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to H^1(U \cup V) \to 0$$

Donc $H^1(U \cup V) = \mathbb{R}$.

Finalement $H^i(U \cup V)$ est égal à $\mathbb{R}$ si $i = 0$ ou 1, $\mathbb{R}^2$ si $i = 2$ et 0 pour $i \geqslant 3$.

4– U' se rétracte par déformation forte sur l'ensemble des plans inclus dans $\{0\} \times \mathbb{R}^3$, qui est difféomorphe (par l'application de l'énoncé) à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Donc sa cohomologie de de Rham est celle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Donc sa cohomologie est $\mathbb{R}$ en degré 0, et 0 en degré $\geqslant 1$.

5– De même que dans la question précédente, $H^*(V') = H^*(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$.

6– On vérifie que $U' \cup V' = \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$, et que $U' \cap V'$ se rétracte sur $U \cup V$ par l'homotopie $P, t \to P_t = \{(x, (1-t)y + tz, (1-t)z + ty, w)\ ,\ ; (x, y, z, w) \in P$.

Ainsi on écrit la suite exacte de Mayer Vietoris, et on obtient $H^i(\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ égal à $\mathbb{R}$ si $i = 0$ ou $i = 2$, à $\mathbb{R}^2$ si $i = 3$, et à 0 sinon.

3. Dualité de Poincaré

On dit qu'une variété M vérifie la propriété $(*)$ si il existe un recouvrement fini de M par des ouverts $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ tel que, pour tout $I \subset \{1, \ldots, r\}$, $\bigcap_{i\in I} U_i$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On admettra que les variétés C^∞ compactes vérifient $(*)$.

1– Soit M une variété C^∞ orientée de dimension n. Si $0 \leqslant k \leqslant n$, montrer que l'application linéaire $\Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}$ définie par $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ est bien définie et induit une application linéaire $DP_M^k : H^k(M) \to H_c^{n-k}(M)^\vee$.

2– Si $M = \mathbb{R}^n$, montrer que DP_M^k est un isomorphisme pour tout k.

3– Si M vérifie $(*)$, montrer que, pour tout k, $H^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie. On pourra raisonner par récurrence sur r.

4– Supposons que M soit recouvert par deux ouverts U et V. En s'inspirant du cas de la cohomologie sans support compact, montrer qu'il existe une suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\cdots \to H_c^{k-1}(M) \to H_c^k(U \cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(M) \to H_c^{k+1}(U \cap V) \to \ldots$$

5– Si M vérifie $(*)$, montrer que $H_c^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

6– Si M vérifie $(*)$, montrer que, pour tout k, DP_M^k est un isomorphisme.

7– Soit M une variété C^∞ compacte orientable. On définit $\chi(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(M)$ la caractéristique d'Euler de M. Montrer que, si $\dim(M)$ est impaire, $\chi(M) = 0$.

8– Soit M une variété C^∞ connexe orientable non compacte de dimension n vérifiant $(*)$. Calculer $H^n(M)$.

9– Donner un exemple de variété ne vérifiant pas $(*)$. Sur cet exemple, la réponse à la question 3 est-elle encore positive ? Et la réponse à la question 5 ? A la question 6 ?

Solution :

1– Comme β est à support compact, $\alpha \wedge \beta$ est à support compact, et son intégrale est bien définie. Il reste à montrer que si α est fermée et β est différentielle d'une forme à support compact (resp. β est fermée et α est exacte), cette intégrale est nulle. Faisons le premier cas, l'autre étant similaire. Par le lemme de Poincaré, il suffit de montrer que $\alpha \wedge \beta$ est la différentielle d'une forme à support compact. Mais, écrivant $\beta = d\gamma$ avec γ à support compact, on a $\alpha \wedge \beta = d(\alpha \wedge \gamma)$ car α est fermée.

2– Si $k > 0$, les espaces vectoriels considérés sont nuls et la question est évidente. Si $k = 0$, DP_M^0 est un isomorphisme entre espaces vectoriels de dimension 1 par le lemme de Poincaré.

3– On raisonne par récurrence sur r, le cas $r = 1$ étant évident. On applique alors Mayer-Vietoris au recouvrement par $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \cdots \cup U_r$. Comme l'hypothèse de récurrence s'applique à U, V et $U \cap V$, on déduit le résultat voulu de la suite exacte longue.

4– On a une suite exacte courte $0 \to \Omega_c^*(U \cap V) \to \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \to \Omega_c^*(M) \to 0$, où $\Omega_c^*(U \cap V) \to \Omega_c^*(U)$ et $\Omega_c^*(U \cap V) \to \Omega_c^*(V)$ sont les prolongement par zéro, et $\Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \to \Omega_c^*(M)$ est la différence des prolongement par zéro. Pour prouver l'exactitude, il faut utiliser une partition de l'unité adaptée à U et V. Comme les applications linéaires dans cette suite exacte courte respectent la différentielle, on en déduit une suite exacte longue en cohomologie à support compact, à l'aide des mêmes arguments que dans la preuve de Mayer-Vietoris sans support compact.

5– On raisonne comme dans la question 3 à l'aide de la suite exacte longue construite dans la question précédente.

6– On raisonne par récurrence sur r, le cas $r = 1$ étant la question 2. On considère le recouvrement de M par $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \cdots \cup U_r$, de sorte que U, V et $U \cap V$ sont justiciables de l'hypothèse de récurrence. On écrit la suite exacte longue MV de Mayer-Vietoris sans support compact associée à ce recouvrement, ainsi que le dual $MV_c^\vee$ de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris à support compact associée à ce recouvrement. Les applications linéaires DP_M^k, DP_U^k, DP_V^k et $DP_{U\cap V}^k$ permettent d'écrire un diagramme $MV \to MV_c^\vee$, qu'on vérifie être commutatif. En utilisant ce diagramme, on vérifie aisément (utilisant le fait que, par récurrence, DP_U^k, DP_V^k et $DP_{U\cap V}^k$ sont des isomorphismes) que les DP_M^k sont des isomorphismes.

7– Par la question précédente, $\dim H^k(M) = \dim H_c^{n-k}(M) = \dim H^{n-k}(M)$. Ainsi, comme n est impair, les termes dans l'expression de la caractéristique d'Euler se simplifie deux par deux, de sorte que $\chi(M) = 0$.

8– L'espace vectoriel $H^n(M)$ est dual de $H_c^0(M)$ qui est nul. C'est donc un espace vectoriel de dimension nulle.

9– On peut prendre pour M une réunion disjointe dénombrable de points indexés par $\mathbb{N}$. $H^0(M)$ s'identifie aux suites de réels et $H_c^0(M)$ aux suites de réels avec un nombre fini de termes non nuls. Ainsi, les questions 3 et 5 ont une réponse négative. En revanche, on vérifie que la question 6 a une réponse positive.

4. Cobordisme orienté

1– Soit M une variété à bord C^∞ compacte orientable de dimension n. Montrer qu'il est possible de construire une variété N sans bord C^∞ compacte orientable de dimension n en « recollant »deux copies de M le long de leurs bords.

2– Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que si M est une variété à bord C^∞ compacte orientée de dimension impaire, la caractéristique d'Euler de ∂M est paire.

3– Donner un exemple, pour tout entier n divisible par 4, d'une variété sans bord C^∞ compacte orientée de dimension n qui ne peut être réalisée comme le bord d'une variété C^∞ compacte orientée de dimension $n+1$.

4– Soit M une surface sans bord C^∞ compacte orientée. Montrer qu'il existe une variété à bord C^∞ compacte orientée de dimension 3 dont le bord est difféomorphe à M.

Solution :

1– Fixons une orientation de M. Notons M_1 et M_2 les deux copies de M, la première avec l'orientation choisie, la seconde avec l'orientation opposée. On définit N topologiquement comme le quotient de $M_1 \cup M_2$ par la relation d'équivalence qui identifie ∂M_1 et ∂M_2 naturellement. On munit alors N d'un jeu de cartes orientées comme suit. Si U est une carte orientée de M_1 ne rencontrant pas ∂M_1, U est une carte de N. Si U est une carte orientée de M_2 ne rencontrant pas ∂M_2, U est une carte de N.

Enfin, si (U,φ) est une carte orientée de M rencontrant ∂M, à valeurs dans $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$ on construit une carte de N dont le domaine est l'ensemble V des points $x \in M$ qui appartiennent soit à $U \subset M \simeq M_1$ soit à $U \subset M \simeq M_2$, et qui envoie $x \in U \subset M_1$ sur $\varphi(x)$ et $x \in U \subset M_2$ sur le symétrique de $\varphi(x)$ par rapport à $\{x_1 = 0\}$.

2– On peut recouvrir N par deux ouverts U et V de sorte que le premier se rétracte par déformation sur la première copie de M, le second sur la seconde copie et leur intersection sur $U \cap V$. Écrivant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée, on voit tout d'abord, en utilisant la question 3 de l'exercice précédent que les $H^k(M)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie. Alors, cette même suite exacte de Mayer-Vietoris montre que $\chi(\partial M) + \chi(N) = 2\chi(M)$. Comme $\chi(N)$ est pair par la question 7 de l'exercice précédent, $\chi(\partial M)$ est également pair.

3– La variété $\mathbb{P}^{n/2}(\mathbb{C})$ vérifie les propriétés requises, par la question précédente. En effet, elle est de dimension n paire et de caractéristique d'Euler $n/2+1$ impaire.

4– Par classification, M est difféomorphe à une surface de genre g, i.e. un tore à g trous, qu'on peut voir plongé dans $\mathbb{R}^3$. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ constitué des points « à l'intérieur »du tore est alors une variété compacte à bord vérifiant les propriétés requises.