Géométrie Différentielle, TD 11 du 15 mai 2013

1. Invariant de Hopf

Soit $n > 1$. On considère les sphères orientées $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{S}^{2n-1}$. Soit $f : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞.

1– Soit ω une forme volume sur $\mathbb{S}^n$ telle que $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 1$. Montrer qu'il existe une $(n-1)$-forme β sur $\mathbb{S}^{2n-1}$ telle que $f^*\omega = \mathrm{d}\beta$.

2– Montrer que le réel $\int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \beta \wedge \mathrm{d}\beta$ ne dépend pas du choix de β. On le note $H(f,\omega)$.

3– Montrer que $H(f,\omega)$ est en fait indépendant de ω. C'est *l'invariant de Hopf* de f. On le note $H(f)$.

4– Montrer que si n est impair, $H(f)$ est nul.

5– Déterminer $H(f)$ quand f est une application constante.
Montrer que si f et f' sont homotopes, $H(f) = H(f')$.

6– (Difficile) Soit f la fibration de Hopf, c'est à-dire l'application $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ donnée par l'équation $f(z,w) = z/w$, où l'on a identifié $\mathbb{S}^3$ à la sphère unité dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{S}^2$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Montrer que $H(f)$ est non nul. En déduire que la fibration de Hopf n'est pas homotope à une application constante.

2. Cohomologie d'une grassmannienne

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. On note $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Si $W \subset \mathbb{R}^4$ est un plan vectoriel, on considère $\varphi_W : \mathcal{L}(W, W^\perp) \to \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ qui, à une application linéaire $u : W \to W^\perp$, associe son graphe $\varphi_W(u) \subset W \oplus W^\perp \simeq \mathbb{R}^4$. On rappelle (exercice 5 du TD3) que les cartes (φ_W) font de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ une variété C^∞.

Soient $U \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans supplémentaires à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}^2$, $V \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ ceux supplémentaires à $\{0\}^2 \times \mathbb{R}^2$, $U' \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans ne contenant pas la droite $\mathbb{R} \times \{0\}^3$, et $V' \subset \mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des plans non contenus dans l'hyperplan $\{0\} \times \mathbb{R}^3$.

1– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $GL_2(\mathbb{R})$. On pourra utiliser la décomposition polaire : si S est l'ensemble des matrices symétriques définies positives, la multiplication $O_2(\mathbb{R}) \times S \to GL_2(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme.

2– Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ qui est C^∞-difféomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

3– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $U \cup V$.

4– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de U'. On pourra considérer l'application $P \mapsto (P \oplus (\mathbb{R} \times \{0\}^3))^\perp$.

5– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de V'. On pourra considérer l'application $P \mapsto P \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^3)$.

6– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$.

3. Dualité de Poincaré

On dit qu'une variété M vérifie la propriété $(*)$ si il existe un recouvrement fini de M par des ouverts $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ tel que, pour tout $I \subset \{1,\ldots,r\}$, $\bigcap_{i\in I} U_i$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On admettra que les variétés C^∞ compactes vérifient $(*)$.

1– Soit M une variété C^∞ orientée de dimension n. Si $0 \leqslant k \leqslant n$, montrer que l'application linéaire $\Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}$ définie par $(\alpha,\beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ est bien définie et induit une application linéaire $DP_M^k : H^k(M) \to H_c^{n-k}(M)^\vee$.

2– Si $M = \mathbb{R}^n$, montrer que DP_M^k est un isomorphisme pour tout k.

3– Si M vérifie $(*)$, montrer que, pour tout k, $H^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie. On pourra raisonner par récurrence sur r.

4– Supposons que M soit recouvert par deux ouverts U et V. En s'inspirant du cas de la cohomologie sans support compact, montrer qu'il existe une suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\cdots \to H_c^{k-1}(M) \to H_c^k(U\cap V) \to H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \to H_c^k(M) \to H_c^{k+1}(U \cap V) \to \ldots$$

5– Si M vérifie $(*)$, montrer que $H_c^k(M)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

6– Si M vérifie $(*)$, montrer que, pour tout k, DP_M^k est un isomorphisme.

7– Soit M une variété C^∞ compacte orientable. On définit $\chi(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(M)$ la caractéristique d'Euler de M. Montrer que, si $\dim(M)$ est impaire, $\chi(M) = 0$.

8– Soit M une variété C^∞ connexe orientable non compacte de dimension n vérifiant $(*)$. Calculer $H^n(M)$.

9– Donner un exemple de variété ne vérifiant pas $(*)$. Sur cet exemple, la réponse à la question 3 est-elle encore positive ? Et la réponse à la question 5 ? A la question 6 ?

4. Cobordisme orienté

1– Soit M une variété à bord C^∞ compacte orientable de dimension n. Montrer qu'il est possible de construire une variété N sans bord C^∞ compacte orientable de dimension n en « recollant »deux copies de M le long de leurs bords.

2– Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que si M est une variété à bord C^∞ compacte orientée de dimension impaire, la caractéristique d'Euler de ∂M est paire.

3– Donner un exemple, pour tout entier n divisible par 4, d'une variété sans bord C^∞ compacte orientée de dimension n qui ne peut être réalisée comme le bord d'une variété C^∞ compacte orientée de dimension $n+1$.

4– Soit M une surface sans bord C^∞ compacte orientée. Montrer qu'il existe une variété à bord C^∞ compacte orientée de dimension 3 dont le bord est difféomorphe à M.