

## Géométrie Différentielle, TD 12 du 17 mai 2013

### 1. Manœuvre d'une voiture

---

On considère une voiture se déplaçant dans le plan. On note  $l$  la distance entre les roues avant et arrière. On repère la voiture par la position  $(x, y)$  des roues arrière, l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec l'axe des abscisses et l'angle  $\varphi$  que font les roues avant avec l'axe de la voiture. La voiture peut avancer (et reculer), ou bien tourner ses roues avant.

- 1- Calculer le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent.
- 2- Montrer qu'on peut faire prendre à la voiture toute position choisie à l'avance.

### Solution :

- 1- On travaille en coordonnées  $(x, y, \theta, \varphi)$ .

Un champ de vecteurs tangent au mouvement consistant à tourner les roues avant est  $X = (0, 0, 0, 1)$ .

Les équations régissant le mouvement consistant à avancer la voiture sont :  $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ ,  $\frac{d(y+l \sin \theta)}{d(x+l \cos \theta)} = \tan(\theta + \varphi)$  et  $d\varphi = 0$ . Elles décrivent respectivement le mouvement des roues arrière, le mouvement des roues avant et le fait qu'on ne tourne pas le volant. On déduit qu'un champ de vecteurs tangent à ce mouvement est  $Y = (l \cos \theta \cos \varphi, l \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ .

Le champ de 2-plans auquel le mouvement est tangent est celui engendré par  $X$  et  $Y$ .

- 2- On va appliquer le théorème de Chow. Il faut montrer que les crochets itérés de  $X$  et  $Y$  engendrent  $\mathbb{R}^4$  en tout point. On calcule  $[X, Y] = (-l \cos \theta \sin \varphi, -l \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ . On calcule  $[Y, [X, Y]] = (l \sin \theta, -l \cos \theta, 0, 0)$ .

On vérifie alors que, en tout point,  $X, Y, [X, Y]$  et  $[Y, [X, Y]]$  engendrent l'espace tangent. On peut donc appliquer le théorème de Chow, et montrer que toute position est accessible.

### 2. Codistributions

---

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ . Une codistribution  $\Gamma$  de dimension  $p$  sur  $M$  est la donnée en tout point  $x \in M$  d'un sous-espace vectoriel  $\Gamma_x \subset T_x M^*$  de dimension  $p$  satisfaisant la condition suivante : pour tout  $y \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $y$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Omega^1(U)$  telles que  $\Gamma_x = \langle \alpha_{1,x}, \dots, \alpha_{p,x} \rangle$  pour tout  $x \in U$ .

On dit que  $\alpha \in \Omega^1(U)$  appartient à la codistribution  $\Gamma$  si  $\alpha_x \in \Gamma_x$  pour tout  $x \in U$ .

Une codistribution  $\Gamma$  de dimension  $p$  est dite intégrable si, au voisinage de tout point  $y \in M$ , il existe une sous-variété  $Y$  de dimension  $n - p$  de  $M$  telle que pour tout  $x \in Y$ , les éléments de  $\Gamma_x$  sont nuls en restriction à  $T_x Y$ .

- 1– Montrer que les codistributions de dimension  $p$  sur  $M$  sont naturellement en bijection avec les champs de  $(n - p)$ -plans sur  $M$ .
- 2– Montrer qu'une codistribution est intégrable si et seulement si le champ de  $(n - p)$ -plans correspondant l'est.
- 3– Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs sur une variété  $M$  et  $\alpha \in \Omega^1(M)$ . Montrer que :

$$d\alpha(X, Y) = d(\alpha(Y))(X) - d(\alpha(X))(Y) - \alpha([X, Y]).$$

- 4– Montrer qu'une codistribution  $\Gamma$  est intégrable si et seulement si pour tout  $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$  appartenant à  $\Gamma$  et tout  $x \in U$ ,  $(d\alpha)_x|_{\text{Ker}(\beta_x)} = 0$ .
- 5– Montrer qu'une codistribution  $\Gamma$  est intégrable si et seulement si pour tout  $\alpha \in \Omega^1(U)$  appartenant à  $\Gamma$ ,  $d\alpha$  s'écrit localement  $\sum_i \beta_i \wedge \gamma_i$  avec  $\beta_i$  appartenant à  $\Gamma$ .

### Solution :

- 1– A une codistribution, on associe le champ de plans « dual », et réciproquement. Il faut montrer que l'un est  $C^\infty$  si et seulement si l'autre l'est. On détaille un sens, l'autre est analogue.

Supposons donné un champ de  $(n - p)$ -plans  $C^\infty$ . On travaille localement, donc on peut se placer au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ . Le champ de  $(n - p)$ -plans est engendré par  $X_1, \dots, X_{n-p}$ . Choisissons  $X_{n-p+1}, \dots, X_n$  de sorte que les  $X_i(0)$  forment une base de l'espace tangent en l'origine. On définit alors des 1-formes  $\alpha_i$  par  $\alpha_i(X_j) = \delta_{i,j}$ . Ces 1-formes sont bien  $C^\infty$  par régularité des solutions d'équations linéaires. Alors, la codistribution associée au champ de  $(n - p)$ -plans choisi est engendrée par  $\alpha_{n-p+1}, \dots, \alpha_n$ . Ceci conclut.

- 2– Cela résulte immédiatement des définitions.
- 3– On peut montrer cette identité localement, donc en coordonnées. C'est un calcul explicite.
- 4– Appliquons le théorème de Frobenius au champ de  $p$ -plans dual. A l'aide de l'identité montrée à la question précédente, on montre ainsi que la codistribution est intégrable si et seulement si, pour tout  $\alpha \in \Omega^1(U)$  appartenant à  $\Gamma$ ,  $d\alpha$  est nulle en restriction au champ de  $p$ -plans associé. Ceci est bien équivalent à la condition de l'énoncé.
- 5– La condition «  $d\alpha$  s'écrit est nulle en restriction au champ de  $p$ -plans associé » implique la condition de la question précédente, donc l'intégrabilité de  $\Gamma$ .

Réciproquement, supposons que  $d\alpha$  est nulle en restriction au champ de  $p$ -plans associé. On travaille localement, en coordonnées, de sorte que le champ de  $p$ -plans est engendré par  $p$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$ . Considérons  $n - p$  champs de vecteurs

$X_{p+1}, \dots, X_n$  (constants par exemple) tels que  $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$  forment en tout point une base de l'espace tangent. C'est possible quitte à restreindre l'ouvert sur lequel on travaille.

On considère les 1-formes différentielles  $\omega_1, \dots, \omega_n$  définies par  $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ . On écrit alors  $d\alpha$  comme combinaison à coefficients  $C^\infty$  des formes  $\omega_i \wedge \omega_j$ . Comme  $d\alpha$  est nulle en restriction au champ de  $p$ -plans, beaucoup des coefficients sont nuls. Les termes restants sont tous de la forme  $\beta_i \wedge \gamma_i$  avec  $\beta_i$  appartenant à  $\Gamma$ . Cela conclut.

### 3. Dérivations des fonctions continues

---

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$  n'admet pas de dérivations non nulles.

**Solution :**

Soit  $\delta$  une dérivation. On a  $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$  de sorte que  $\delta(1) = 0$ , et que  $\delta(c) = 0$  pour toute constante  $c$ .

Si  $f \geq 0$  et  $f(x) = 0$ , on pose  $g = \sqrt{f}$ . Il vient  $\delta(f) = 2g\delta(g)$  de sorte que  $\delta(f)(x) = 0$ .

Si  $f$  est telle que  $f(x) = 0$ , on montre  $\delta(f)(x) = 0$ , en écrivant  $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$  : on est alors ramené au cas précédent.

Finalement, si  $f$  est quelconque, on écrit  $f = (f - f(x)) + f(x)$ . Les résultats ci-dessus montrent  $\delta(f)(x) = 0 + 0 = 0$ .

#### 4. Champs de vecteurs commutant

---

Soient  $X_1, \dots, X_p$  des champs de vecteurs commutant deux à deux sur une variété  $C^\infty$   $M$  de dimension  $n$ , qui sont indépendants en  $x \in M$ . On veut montrer qu'il existe une carte au voisinage de  $x$  où  $X_1, \dots, X_p$  sont égaux aux champs de vecteurs  $\partial_1, \dots, \partial_p$  constants de valeur les  $p$  premiers vecteurs de la base canonique.

On rappelle que le cas  $p = 1$  est le théorème connu de redressement des champs de vecteurs (exercice 1 du TD8). On raisonne donc par récurrence sur  $p$  et on suppose  $p \geq 2$ .

- 1– Montrer qu'on peut choisir une carte au voisinage de  $x$ , en laquelle  $x$  est l'origine et telle que  $X_1 = \partial_1, \dots, X_{p-1} = \partial_{p-1}$  et :

$$X_p = \sum_{i=1}^n f_i(x_p, \dots, x_n) \partial_i.$$

- 2– Montrer qu'on peut supposer de plus que :

$$X_p = \sum_{i=1}^{p-1} f_i(x_p, \dots, x_n) \partial_i + \partial_p.$$

- 3– Effectuer un changement de coordonnées de la forme  $y_i = x_i + g_i(x_p, \dots, x_n)$  si  $i \leq p-1$  et  $y_i = x_i$  si  $i \geq p$  pour conclure.

#### Solution :

- 1– Par récurrence sur  $p$ , on peut trouver une carte telle que  $X_1 = \partial_1, \dots, X_{p-1} = \partial_{p-1}$ . On écrit alors  $X_p = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$  en coordonnées. La condition  $[X_p, X_i] = 0$  implique, par calcul direct, que les fonctions  $f_i$  ne dépendent que de  $x_p, \dots, x_n$ .

Par translation, on peut supposer que  $x$  est l'origine de la carte.

- 2– Considérons le champ de vecteurs  $\sum_{i=p}^n f_i(x_p, \dots, x_n) \partial_i$  comme un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^{n-p+1}$ . Il est non nul en  $x$  car  $X_1, \dots, X_p$  sont indépendants en  $x$ . On peut donc appliquer le théorème de redressement des champs de vecteurs, et changer de coordonnées locales pour que ce champ de vecteurs devienne égal à  $\partial_p$ .

Appliquant ce changement de coordonnées aux  $n - p + 1$  dernières coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$ , on obtient une nouvelle carte, qui convient.

- 3– Soit  $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$ . Sa forme triangulaire montre que la différentielle de  $\varphi$  a déterminant 1, de sorte que c'est un difféomorphisme local. On se restreint à des petits ouverts en lesquels c'est un difféomorphisme.

On calcule aisément, si  $1 \leq i \leq p-1$  :  $\varphi_* \partial_i(\varphi(y)) = d_y \varphi(\partial_i) = \partial_i$ , de sorte que  $\varphi_* X_i = \partial_i$ . De plus  $\varphi_* X_p(\varphi(y)) = d_y \varphi(X_p) = \partial_p + \sum_{i=1}^{p-1} (f_i + \frac{\partial g_i}{\partial x_p})$ . Il suffit donc de choisir  $g_i$  telle que  $g_i(0) = 0$  et  $\frac{\partial g_i}{\partial x_p} = -f_i$ .

## 5. Deux champs de vecteurs

---

- 1– Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs  $C^\infty$  sur une variété  $M$  de dimension 2. Soit  $x \in M$  tel que  $X(x)$  et  $Y(x)$  soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe  $f, g$  des fonctions  $C^\infty$  strictement positives définies au voisinage de  $x$  telles que  $[fX, gY] = 0$ .
- 2– Le résultat est-il encore valable si  $M$  est de dimension 3 ?

### Solution :

- 1– On travaille localement au voisinage de  $x$ . Comme  $X(x) \neq 0$ , par théorème de redressement des champs de vecteurs, on peut supposer  $X = \partial_1$ . Notons  $Y = a\partial_1 + b\partial_2$ , avec  $b(x) \neq 0$  par hypothèse. On effectue un changement de variables de la forme  $(x, y) \mapsto (x, h(x, y))$ . L'expression de  $X$  ne change pas, mais  $Y$  devient  $(a + b\frac{\partial f}{\partial x_1})\partial_1 + b\frac{\partial f}{\partial x_2}\partial_2$ . Choisissons  $f$  telle que  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{a}{b}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \neq 0$ . Dans un tel système de coordonnées,  $X = \partial_1$  et  $Y = c\partial_2$  avec  $c \neq 0$  au voisinage de  $X$ . On prend  $f = 1$  et  $g = \pm\frac{1}{c}$ .
- 2– Choisissons  $X$  et  $Y$  de sorte qu'ils engendrent un champ de 2-plans non intégrable. Alors  $fX$  et  $gY$  engendrent le même champ de 2-plans. La condition  $[fX, gY] = 0$  permettrait d'appliquer le théorème de Frobenius pour montrer son intégrabilité. C'est absurde.

## 6. Feuilletages

---

- 1– Soient  $M$  et  $N$  deux variétés connexes et  $f : M \rightarrow N$  une submersion. Montrer qu'il existe un feuilletage sur  $M$  dont les feuilles sont les composantes connexes des  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in N$ .
- 2– Dans la situation de la question précédente, les feuilles sont-elles nécessairement toutes difféomorphes ?
- 3– Montrer qu'il existe un feuilletage de  $\mathbb{R}^3$  dont toutes les feuilles sont des cylindres (i.e. sont difféomorphes à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ).

### Solution :

- 1– Il s'agit de définir un atlas de cartes feuilleté sur  $M$ . Soit  $x \in M$ . D'après le théorème des submersions, il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , un voisinage  $V$  de  $y = f(x)$ , un voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}^k$  et un difféomorphisme  $\psi : U \rightarrow V \times W$  tel que  $pr_1 \circ \psi = f$ . Quitte à réduire  $V$ , on peut supposer que c'est le domaine d'une carte  $\theta$  de  $N$ . Posons alors  $\tilde{\psi} = (\theta, \text{Id}) \circ \psi$ . C'est une carte au voisinage de  $x$ , qui envoie les surfaces de niveau locales de  $f$  sur des morceaux de sous-espaces vectoriels  $\{a\} \times \mathbb{R}^k$ . Par conséquent, l'ensemble de telles applications  $\tilde{\psi}$  définit un atlas de cartes feuilleté sur  $M$ .

- 2– Ce n'est pas le cas en général : prendre  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et  $f$  la projection sur la première coordonnée.
- 3– Soit  $U$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^3$  obtenu en lui retirant

$$A = \{(x, 0, \arctan(x) + n\pi/2 \mid x \in [0, +\infty[, n \in \mathbb{Z}\}.$$

L'intersection de  $U$  avec un plan horizontal est  $\mathbb{R}^2$  privé d'un point, donc un cylindre. Ceci montre que  $U$  admet un feuilletage dont toutes les feuilles sont des cylindres (on est dans la situation de la première question avec pour submersion l'application « troisième coordonnée »).

Par ailleurs, on voit facilement que  $U$  est homéomorphe (donc difféomorphe) à  $\mathbb{R}^3$ .