**Géométrie Différentielle, TD 13 du 24 mai 2013**

## 1. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit $V$ l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur $V$ qui soit invariant par l'action naturelle de $SU(2)$ sur $V$.

3– En déduire l'existence d'un morphisme injectif de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

4– Montrer qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme de groupes de Lie.

5– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

6– En déduire la cohomologie de de Rham de $SO(3)$.

7– Expliciter des formes différentielles bi-invariantes sur $SO(3)$ qui représentent les classes de cohomologie de $SO(3)$. On pourra considérer $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

**Solution :**

1– Soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. L'égalité ${}^t\bar{x}x = I_2$ donne $|a|^2 + |c|^2 = 1$ et $|b|^2 + |d|^2 = 1$. L'égalité $x{}^t\bar{x} = I_2$ donne aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Ainsi, $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$.
De plus, $1 = \det(x) = ad - bc$. Par Cauchy-Schwarz,
$$1 \leqslant |ad| + |bc| = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$
Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz montre que $ad \in \mathbb{R}_+$ et $bc \in \mathbb{R}_-$. Ainsi, si $a = re^{i\theta}$, on a $d = re^{-i\theta}$, et si $b = r'e^{i\theta'}$ on a $c = -r'e^{-i\theta'}$. On a montré que $x$ était de la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$
avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3$. Réciproquement, une telle matrice appartient bien à $SU(2)$. Ainsi, la formule ci-dessus définit un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^3$ et $SU(2)$.

2– L'espace $V$ est l'algèbre de Lie de $SU(2)$. Ainsi, $SU(2)$ agit naturellement sur $V$ par conjugaison (c'est l'action Ad). Un élément $X = \begin{pmatrix} ix & -y + iz \\ y + iz & -ix \end{pmatrix}$ de $V$ a pour déterminant $x^2 + y^2 + z^2$. On définit alors une norme euclidienne sur $V$ par

$\|X\| = \sqrt{\det(X)}$. Comme la conjugaison ne modifie pas le déterminant, cette norme est invariante sous l'action de $SU(2)$.

3– Soit $\Phi = \mathrm{Ad} : SU(2) \to GL(V)$. Pour la norme de la question précédente, $\Phi$ prend ses valeurs dans $O(V)$. Comme $SU(2)$ est connexe, on a même $\Phi(SU(2)) \subset SO(V)$. De plus, $\Phi : SU(2) \to SO(V)$ est $C^\infty$ car polynomiale, c'est donc un morphisme de groupes de Lie.

Si $g \in \ker(\Phi)$, alors $g$ commute avec toutes les matrices de $V$. En particulier, $g$ commute avec toutes les matrices antisymétriques réelles (prendre $x = z = 0$) et toutes les matrices symétriques rélles (prendre $y = 0$ et diviser par $i$, ajouter alors $\lambda I_2$). Ainsi, $g$ commute avec toutes les matrices réelles, c'est donc une homothétie, puis $g = \pm I_2$. Ainsi, $\Phi$ engendre un morphisme injectif $\widetilde{\Phi} : SU(2)/\{\pm I_2\} \to SO(V)$.

4– Par homogénéité, $\widetilde{\Phi}$ est un morphisme de rang constant ; par forme normale et vu son injectivité, c'est une immersion. Ces deux groupes de Lie sont de même dimension 3, donc $\widetilde{\Phi}$ est un difféomorphisme local. En particulier, l'image de $\widetilde{\Phi}$ est un sous-groupe ouvert de $SO(V)$, et il est donc égal à $SO(V)$ par connexité. On a montré que $SO(V)$ était difféomorphe à $SU(2)/\{\pm 1\}$.

5– D'après la question précédente, $SO(V)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/\{\pm \mathrm{Id}\} = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

6– On connaît la cohomologie des espaces projectifs réels : $H^0(SO(3)) = \mathbb{R}$, $H^1(SO(3)) = 0$, $H^2(SO(3)) = 0$ et $H^3(SO(3)) = \mathbb{R}$.

7– Les formes différentielles bi-invariantes correspondent aux formes alternées sur l'algèbre de Lie invariantes par l'action adjointe (par conjugaison) du groupe. Il faut donc trouver une 0-forme alternée et une 3-forme alternée sur l'algèbre de Lie de $SO(3)$ qui soient non triviales et invariantes par l'action adjointe. (On rappelle que cette algèbre de Lie est constituée des matrices antisymétriques).

La 0-forme alternée est évidente : c'est la forme constante égale à 1.

Comme 3-forme alternée, on peut prendre $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

## 2. Groupe affine

Soit $G$ l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$ de la forme $f_{a,b} : x \mapsto ax+b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1– Montrer que $G$ est un groupe de Lie, difféomorphe à $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est isomorphe au groupe de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

2– Soient $A$ et $B$ les générateurs canoniques de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$. Calculer $[A, B]$.

3– Quels sont les sous-groupes à un paramètre de $G$ ? Sont-ils des sous-groupes de Lie ?

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et $G$.

**Solution :**

1– On vérifie que $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$ et $f_{a,b}^{-1} = f_{1/a,-b/a}$. Ainsi, la composition et l'inversion sont $C^\infty$ sur la variété $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, ce qui montre que $G$ est bien un groupe de Lie.
Comme le groupe de matrices indiqué vérifie la même formule pour la composition, les deux groupes sont isomorphes.

2– On voit $G$ comme un sous-groupe de Lie de $GL_2(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$ est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, de base $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ s'obtient comme restriction à $\mathfrak{g}$ du crochet de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, qui est simplement le crochet de Lie des matrices. Ainsi, $[A, B] = AB - BA = B$, comme on le vérifie en faisant le produit matriciel.

3– On obtient l'exponentielle de $\mathfrak{g}$ comme restriction de l'exponentielle de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, qui est simplement l'exponentielle de matrice. Notons que

$$\exp \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & \frac{e^x-1}{x} y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans $G$, on obtient donc :

$$\exp(xA + yB) = f_{e^x, \frac{e^x-1}{x} y}. \tag{1}$$

Les sous-groupes à un paramètre de $G$ sont de la forme $t \mapsto \exp(tX)$ pour un élément $X$ de $G$. On écrit $X = xA + yB$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, et on en déduit que le sous-groupe à un paramètre précédemment mentionné est donné par

$$t \mapsto f_{e^{tx}, \frac{e^{tx}-1}{x} y}.$$

En distinguant les cas $y = 0$ et $y \neq 0$, on voit que les images de ces sous-groupes à un paramètre sont des sous-variétés de $G$. Ce sont donc bien des sous-groupes de Lie !

4– En identifiant $f_{a,b}$ avec le couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'exponentielle est donnée par $\exp(x, y) = (e^x, \frac{e^x-1}{x} y)$. Ainsi, sa différentielle s'écrit

$$d\exp_{(x,y)}(u, v) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{e^x x - (e^x-1)}{x^2} y & \frac{e^x-1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

En particulier, le déterminant de $d\exp_{(x,y)}$ est non nul, ce qui montre que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local.
La formule (1) montre de plus que c'est une bijection entre $\mathfrak{g}$ et $G$, ce qui conclut.

## 3. Groupes de Lie commutatifs

Soit $G$ un groupe de Lie commutatif.

1– Quelle est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $G$ ?

2– Montrer que l'application exponentielle $exp : \mathfrak{g} \to G$ est un morphisme de groupes.

3– Supposons $G$ connexe. Montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q$ pour des entiers $p, q \geqslant 0$.

4– Dans le cas général, montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q \times A$ où $p, q \geqslant 0$ sont des entiers et $A$ est un groupe commutatif discret.

**Solution :**

1– Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $G$. C'est un espace vectoriel de dimension $\dim(G)$. On va montrer que le crochet y est identiquement nul. Pour cela, on remarque que, comme $G$ est commutatif, la conjugaison par $g \in G$ est l'identité de $G$. Prenant la différentielle en $e$, il vient $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$. L'application Ad est donc l'application constante de valeur $\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$. Différenciant à nouveau, il vient $\mathrm{ad} = 0$. En particulier, si $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] = \mathrm{ad}\, X(Y) = 0$, ce qu'on voulait montrer.

2– Si $X, Y \in \mathfrak{g}$, comme $X$ et $Y$ commutent, les flots des champs de vecteurs correspondants commutent. Ceci signifie exactement que $exp : \mathfrak{g} \to G$ est un morphisme de groupes.

3– Posons $n = \dim(G)$. L'application $exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local en l'origine. Son noyau est donc un sous-groupe discret de $\mathfrak{g}$. De plus, son image contient un voisinage de l'origine de $G$. Comme $G$ est connexe, son image est $G$.

Ainsi, $G$ est le quotient de $\mathfrak{g}$ par un sous-groupe discret. Les sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$ sont isomorphes $\mathbb{Z}^q$, engendrés par $q$ éléments linéairement indépendants. Alors, $G \simeq \mathfrak{g}/Z^q \simeq \mathbb{R}^{n-q} \times (\mathbb{S}^1)^q$.

4– Notons $G_0$ la composante neutre de $G$. C'est un groupe de Lie commutatif connexe, donc, par la question précédente, il est isomorphe à $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q$. Notons $A$ le quotient de $G$ par $G_0$. C'est un groupe commutatif discret. Il reste à prouver que la suite exacte courte $0 \to G_0 \to G \to A \to 0$ de groupes commutatifs est scindée ; en effet, on aura alors $G \simeq G_0 \times A \simeq \mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q \times A$, ce qu'il fallait montrer.

Pour cela, on va construire une section $s : A \to G$ de l'application quotient $p : G \to A$. Comme $A$ est dénombrable à l'infini et discret, $A$ est dénombrable. On ordonne ses éléments : $A = \{a_0 = e, a_1, a_2, \ldots\}$. On note $H_n$ le sous-groupe de $H$ engendré par $a_0, \ldots, a_n$. On va construire par récurrence sur $n \geqslant 0$ un morphisme de groupes $s_n : H_n \to G$ tel que $p \circ s_n(h) = h$ pour tout $h \in H_n$ et $s_n|_{H_{n-1}} = s_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Cela conclut : comme les $s_n$ sont compatibles et que $A$ est réunion des $H_n$, ils définissent la section $s : A \to G$ recherchée.

On initialise la récurrence en prenant $s_0(e) = e$.

Supposons alors $s_{n-1}$ définie. S'il n'existe pas d'entier $k \geqslant 1$ tel que $a_n^k \in H_{n-1}$, on prend pour $s_n(a_n)$ un antécédent quelconque de $a_n$ par $p$. On vérifie que cela induit un morphisme $s_n : H_n \to G$ vérifiant les propriétés voulues.

S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $a_n^k = b \in H_{n-1}$, on choisit un tel $k$ minimal. On note alors $g$ un antécédent quelconque de $a_n$ par $p$. Alors $p(g^k \cdot s_{n-1}(b)^{-1}) = e$ de sorte que $g^k \cdot s_{n-1}(b)^{-1} \in G_0$. Comme $G_0 \simeq \mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q$ est un groupe divisible, il existe $g_0 \in G_0$ tel que $g_0^k = g^k \cdot s_{n-1}(b)^{-1}$. Alors $g' = g \cdot g_0^{-1}$ est un antécédent de $a_n$ par $p$ qui vérifie $g'^k = s_{n-1}(b)$. On pose alors $s_n(a_n) = g'$, et on vérifie aisément que cela induit un morphisme $s_n : H_n \to G$ vérifiant les propriétés voulues.

## 4. Exponentielle de matrice

1– Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ est une application $C^\infty$, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $T_0 \exp = \mathrm{Id}$.

2– Soient $G$ un sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, de telle sorte que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Si $G$ est connexe, montrer que $\exp(\mathfrak{g})$ engendre $G$.

3– Dans le cas de $G = SO(n)$, montrer que l'exponentielle est surjective. En revanche, pour $G = SL(2, \mathbb{R})$, montrer que ce n'est pas le cas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace $\geqslant -2$).

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'espace des matrices symétriques réelles et l'espace des matrices symétriques réelles définies positives.

5– Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $L_M$ et $R_M$ les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par $M$, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q \geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ et $\mathrm{ad}\, M = L_M - R_M$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}.$$

6– Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{ad}\, M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

**Solution :**

1– La fonction exponentielle est une série entière de domaine de convergence $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc analytique, et en particulier $C^\infty$, comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est donc $C^\infty$ comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL(n, \mathbb{R})$.

Comme $\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$, on a

$$d\exp_M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} M^k X M^{n-k-1}}{n!} \tag{2}$$

(attention à la non commutativité du produit !). En particulier, $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.

2– L'exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to GL(n, \mathbb{R})$ est $C^\infty$ et immersive en 0, par la question précédente. Comme elle prend ses valeurs dans $G$, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est encore $C^\infty$ et immersive en 0. Comme $\mathfrak{g}$ et $G$ sont de même dimension, c'est un difféomorphisme local en 0. En particulier, $\exp(\mathfrak{g})$ contient un voisinage ouvert de $I_n$ dans $G$.

Soit $H$ le sous-groupe de $G$ engendré par $\exp(\mathfrak{g})$. Il contient un voisinage ouvert de 0, et est donc ouvert. Son complémentaire est réunion de classes à gauche de $H$, et est donc également ouvert, si bien que $H$ est fermé. Par connexité, $H = G$.

3– Soit $x \in SO(n)$. Il existe une matrice orthogonale $M$ telle que $MxM^{-1}$ soit diagonale par blocs égaux à 1 ou de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ces blocs sont respectivement l'exponentielle de 0 et $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ (en complexe, le bloc $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, qu'il est facile d'écrire comme une exponentielle de matrice, et on revient ensuite en réel). Il existe donc une matrice antisymétrique $X$ telle que $MxM^{-1} = \exp(X)$. Finalement, $x = \exp(M^{-1}XM)$.

Montrons que, pour $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, i.e., $\mathrm{tr}(X) = 0$, alors $\mathrm{tr}(\exp(X)) \geqslant -2$. Si $X$ a deux valeurs propres réelles, elles sont de la forme $a$ et $-a$, et on a $\mathrm{tr}(\exp(X)) = e^a + e^{-a} \geqslant 0$. Sinon, les valeurs propres $a$ et $-a$ de $X$ sont complexes conjuguées, et elles sont donc imaginaires pures, i.e. $a = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathrm{tr}(\exp(X)) = e^{ib} + e^{-ib} = 2\cos(b) \geqslant -2$. Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$.

4– En diagonalisant une matrice symétrique dans une base orthonormée, on vérifie que son exponentielle est symétrique définie positive Réciproquement, soit $M$ symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée, puis en prenant le logarithme des valeurs propres, on construit une matrice symétrique $X$ telle que $\exp(X) = M$. De plus, si $P$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut $\log(\lambda_i)$ aux valeurs propres $\lambda_i$ de $M$, on a $X = P(M)$.

Montrons que $X$ est l'unique antéćedent de $M$ par l'exponentielle. Si $M = \exp(X')$, alors $X'$ commute avec $M$, donc avec tous les polynômes en $M$, donc avec $X$. En particulier, $\exp(X' - X) = \exp(X')\exp(X)^{-1} = I_n$. En diagonalisant $X' - X$, on en déduit que $X' - X = 0$.

Ainsi, det réalise une bijection entre l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices symétriques définies positives. Il reste à vérifier que c'est un difféomorphisme.

Soit $M$ une matrice symétrique, montrons que exp est une immersion en $M$. Quitte à diagonaliser $M$, on peut supposer que $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. La formule (2) montre alors que

$$d\exp_M(A)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!} A_{ij}.$$

Il suffit donc de vérifier que les coefficients $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!}$ sont non nuls. Si $\lambda_i = \lambda_j$, ce coefficient est égal à $e^{\lambda_i}$, et il n'y a rien à faire. Sinon, le coefficient est égal à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\lambda_i^n - \lambda_j^n}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \neq 0.$$

Ainsi, $d\det$ est partout inversible sur l'espace des matrices symétriques. En particulier, det est un difféomorphisme local, et donc une application ouverte. Sa réciproque est donc continue, ce qui conclut la preuve.

5– L'équation (2) peut se réécrire $d\exp_M = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$. De plus, l'équation $\operatorname{ad} M = L_M - R_M$ (i.e. $\operatorname{ad}(M)X = MX - XM$) a été démontrée en cours. Notons de plus que les opérateurs $L_M$ et $R_M$ commutent.

Supposons tout d'abord $L_M - R_M$ inversible. Alors

$$\begin{aligned} d\exp_M &= \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{L_M^n - R_M^n}{L_M - R_M} = \frac{1}{L_M - R_M} \left(\exp(L_M) - \exp(R_M)\right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{ad} M} \exp(L_M) \left(\mathrm{Id} - \exp(-\operatorname{ad} M)\right) = \exp(L_M) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

Notons que cette preuve n'utilise que le fait que $L_M$ et $R_M$ commutent. Lorsque $L_M - R_M$ n'est pas inversible, le même argument s'applique donc à $L_M + \lambda\,\mathrm{Id}$ et $R_M$ avec $\lambda > 0$ assez petit, de telle sorte que $L_M - R_M + \lambda\,\mathrm{Id}$ soit inversible. On conclut ensuite en faisant tendre $\lambda$ vers 0.

6– Si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$ sont les valeurs propres complexes de $\operatorname{ad} M$, la formule de la question précédente montre que les valeurs propres complexes de $\exp(-M) d\exp_M$ sont $\frac{1-e^{-\lambda_k}}{\lambda_k}$ si $\lambda_k \neq 0$, et 1 si $\lambda_k = 0$. Ainsi, cet opérateur est inversible si et seulement si les valeurs propres non nulles satisfont $e^{-\lambda_k} \neq -1$, i.e. $\lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.

## 5. Décompositions de $GL(n,\mathbb{R})$

1– Soient $\mathcal{A}$ le groupe des matrices réelles diagonales ayant des valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{N}$ le groupe des matrices réelles triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N} & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ (K, A, N) & \mapsto & KAN \end{array} \right.$ est un difféomorphisme $C^\infty$.

2– Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{S} & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ (K, S) & \mapsto & KS \end{array} \right.$ est un difféomorphisme $C^\infty$.

3– En utilisant l'exercice précédent, en déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $SO(n) \times \mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.

**Solution :**

1– Soit $M \in GL(n, \mathbb{R})$. En orthogonalisant ses colonnes, on vérifie qu'il existe des matrices $K$ orthogonale et $D$ triangulaire supérieure avec des coefficients $> 0$ sur la diagonale, telles que $M = KD$. Comme $D$ s'écrit aisément sous la forme $AN$, on obtient la surjectivité de $\Phi$.

Si $KAN = K'A'N'$, alors ${}^tK'K = A'N'N^{-1}A^{-1}$. La matrice ${}^tK'K$ est orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, c'est donc l'identité, et $K' = K$. Cela implique aisément que $A = A'$ et $N = N'$. Ainsi, $\Phi$ est une bijection.

On va montrer que $\Phi$ est un difféomorphisme local. En particulier, l'image d'un ouvert sera ouverte par le théorême d'inversion locale, donc $\Phi^{-1}$ sera continue et cela conclura la preuve.

Soient $(K, A, N) \in O(n) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N}$. Alors $T_K O(n) = \{U \mid {}^tUK + {}^tKU = 0\}$ est de dimension $n(n-1)/2$, tandis que $T_A\mathcal{A}$ est constitué des matrices diagonales, de dimension $n$, et $T_N\mathcal{N}$ est constitué des matrices triangulaires supérieures strictes, de dimension $n(n-1)/2$. Comme $n(n-1)/2 + n + n(n-1)/2 = n^2$, les dimensions coïncident et il suffit de vérifier que $T_{(K,A,N)}\Phi$ est injective.

Soient $U, V, W$ telles que $T_{(K,A,N)}\Phi(U, V, W) = 0$, i.e. $UAN + KVN + KAW = 0$, i.e. ${}^tKUAN + VN + AW = 0$. Soit $U' = {}^tKU$ antisymétrique, avec $U' = -(VN + AW)N^{-1}A^{-1}$. En particulier, $U'$ est triangulaire supérieure. Par antisymétrie, $U' = 0$, puis $U = 0$. Ainsi, $VN + AW = 0$. Comme $W$ est triangulaire supérieure stricte, les coefficients diagonaux de $AW$ sont nuls, et les coefficients diagonaux de $VN$ également. Mais ces coefficients sont ceux de $V$, donc $V = 0$. Finalement, on obtient aussi $W = 0$, ce qui conclut.

2– Soit $M \in GL(n, \mathbb{R})$. La matrice ${}^tMM$ est alors symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée puis en prenant la racine carrée de chaque coefficient sur la diagonale, on obtient une matrice symétrique définie positive $S$ telle que ${}^tMM = S^2 = {}^tSS$. Alors $K = MS^{-1}$ satisfait ${}^tKK = I_n$, i.e., $K$ est orthogonale. On a montré la surjectivité de $\Phi$.

Réciproquement, soient $K, S$ tels que $M = KS$. Alors ${}^tMM = {}^tSS$. Pour démontrer l'unicité de $S$, il suffit donc de voir que toute matrice $A$ de $\mathcal{S}$ admet une unique racine carrée dans $\mathcal{S}$. Dans l'argument précédent, on a construit une racine $S$ de $A$, et par construction c'est un polynôme en $A$ (utiliser un polynôme d'interpolation de Lagrange). Si $S'$ est une autre racine carrée, elle commute avec $A$, donc avec $S$. En les diagonalisant simultanément, et comme $S$ et $S'$ ont des valeurs propres positives, on en déduit que $S = S'$.

Ainsi, $\Phi$ est une bijection. Il reste à montrer que c'est un difféomorphisme. Soient $K \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}$. L'espace tangent à $O(n)$ en $K$ est formé des matrices $U$ telles que ${}^tKU + {}^tUK = 0$, et est de dimension $n(n-1)/2$, tandis que l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en $S$ est formé des matrices symétriques, et est de dimension $n(n+1)/2$. Les dimensions coïncident bien, il suffit donc de vérifier que $T_{(K,S)}\Phi$ est une immersion pour conclure.

Soit $(U, V) \in T_K O(n) \times T_S \mathcal{S}$, alors $T_{(K,S)}\Phi(U, V) = KV + US$. Si $T_{(K,S)}\Phi(U, V) = 0$, on a donc $V + {}^tKUS = 0$. Soit $U' = {}^tKU$ antisymétrique, elle vérifie $V + U'S = 0$, donc $U'S$ est symétrique, puis

$$U'S = {}^t(U'S) = {}^tS^tU' = -SU'.$$

Quitte à diagonaliser $S$ dans une base orthonormée, on peut supposer que $S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ puisque $S$ est définie positive. L'équation $(U'S)_{ij} = -(SU')_{ij}$ donne alors $(\lambda_i + \lambda_j)U'_{ij} = 0$, puis $U'_{ij} = 0$ car $\lambda_i + \lambda_j > 0$. Ainsi, $U' = 0$, puis $U = KU' = 0$, et enfin $V = -U'S = 0$.

3– L'application $\Phi$ se restreint à $SO(n) \times \mathcal{S}$ en un difféomorphisme entre $SO(n) \times \mathcal{S}$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant strictement positif. Notons $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de déterminant 1. Alors $\Phi$ se restreint en un difféomorphisme entre $SO(n) \times \mathcal{S}_1$ et $SL_n(\mathbb{R})$. Finalement, l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{S}$ (voir le TD précédent), qui se restreint en un difféomorphisme entre l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle et $\mathcal{S}_1$. Ainsi, $\mathcal{S}_1$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.