Géométrie Différentielle, TD 13 du 24 mai 2013

1. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action naturelle de $SU(2)$ sur V.

3– En déduire l'existence d'un morphisme injectif de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

4– Montrer qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme de groupes de Lie.

5– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

6– En déduire la cohomologie de de Rham de $SO(3)$.

7– Expliciter des formes différentielles bi-invariantes sur $SO(3)$ qui représentent les classes de cohomologie de $SO(3)$. On pourra considérer $(X, Y, Z) \mapsto \mathrm{Tr}(XYZ - XZY)$.

2. Groupe affine

Soit G l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$ de la forme $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1– Montrer que G est un groupe de Lie, difféomorphe à $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est isomorphe au groupe de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

2– Soient A et B les générateurs canoniques de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Calculer $[A, B]$.

3– Quels sont les sous-groupes à un paramètre de G ? Sont-ils des sous-groupes de Lie ?

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G.

3. Groupes de Lie commutatifs

Soit G un groupe de Lie commutatif.

1– Quelle est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G ?

2– Montrer que l'application exponentielle $exp : \mathfrak{g} \to G$ est un morphisme de groupes.

3– Supposons G connexe. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q$ pour des entiers $p, q \geqslant 0$.

4– Dans le cas général, montrer que G est isomorphe à $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{S}^1)^q \times A$ où $p, q \geqslant 0$ sont des entiers et A est un groupe commutatif discret.

4. Exponentielle de matrice

1– Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $T_0 \exp = \mathrm{Id}$.

2– Soient G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, de telle sorte que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. Si G est connexe, montrer que $\exp(\mathfrak{g})$ engendre G.

3– Dans le cas de $G = SO(n)$, montrer que l'exponentielle est surjective. En revanche, pour $G = SL(2,\mathbb{R})$, montrer que ce n'est pas le cas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace $\geqslant -2$).

4– Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre l'espace des matrices symétriques réelles et l'espace des matrices symétriques réelles définies positives.

5– Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ et $\mathrm{ad}\, M = L_M - R_M$, puis en déduire que

$$\exp(-M) d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}\, M)^k}{(k+1)!}.$$

6– Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{ad}\, M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$.

5. Décompositions de $GL(n,\mathbb{R})$

1– Soient $\mathcal{A}$ le groupe des matrices réelles diagonales ayant des valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{N}$ le groupe des matrices réelles triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N} & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ (K, A, N) & \mapsto & KAN \end{array} \right.$ est un difféomorphisme C^∞.

2– Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{S} & \to & GL(n,\mathbb{R}) \\ (K, S) & \mapsto & KS \end{array} \right.$ est un difféomorphisme C^∞.

3– En utilisant l'exercice précédent, en déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $SO(n) \times \mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.