Géométrie Différentielle, TD 14 du 31 mai 2013

1. Un groupe de Lie n'a pas de petit sous-groupe

Soit G un groupe de Lie, e son élément neutre et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1– Construire des voisinages bornés $T \subset U$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tels que $\exp : U \to W := \exp(U)$ soit un difféomorphisme, et tels que pour tous $v, w \in T$, $v + w \in U$.

2– Montrer qu'il existe un voisinage de e dans G ne contenant pas d'autre sous-groupe de G que $\{e\}$.

Solution :

1– Comme exp est un difféomorphisme local en 0, U existe. On pose $T := U/2$.

2– Montrons que le voisinage $V := \exp(T)$ convient. Soit H un sous-groupe de G inclus dans V. Supposons par l'absurde qu'il contient un élément $h \neq e$ et notons $v = (\exp|_T)^{-1}(h)$. Comme v est non nul (car $h \neq e$) et que T est borné (car U l'est), on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ minimal tel que $nv \notin T$. Par choix de T, on a cependant $nv = (n-1)v + v \in U$. Alors, $\exp(nv) = \exp(v)^n = h^n$ est un élément de H. Cependant, comme exp réalise une bijection de U sur W envoyant T sur V, on a $\exp(nv) \notin V$. C'est absurde, et cela conclut.

2. Espace hyperbolique réel

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $O(1,n)$ le groupe orthogonal de cette forme quadratique et $SO_0(1,n)$ la composante connexe de l'identité de $O(1,n)$. On considère $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0, \ldots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$: c'est l'espace hyperbolique réel de dimension n.

1– Montrer que $SO_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

2– Quel est le stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ pour cette action ?

3– Construire un morphisme de groupes surjectif $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$.

4– En déduire le nombre de composantes connexes de $O(1,n)$.

Solution :

1– Soit $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. On va montrer qu'il peut être envoyé sur $a = (1, 0, \ldots, 0)$ par un élément $M \in SO_0(1,n)$. On procède en deux temps. Tout d'abord, comme $SO(n)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{n-1}$, on peut trouver une matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$

avec $A \in SO(n)$ envoyant x sur un vecteur de la forme $(x_0, y, 0, \dots, 0)$. Notons qu'on a bien $M_1 \in SO_0(1,n)$ car $SO(n)$ est connexe. On peut alors écrire $x_0 = \cosh(t)$ et $y = -\sinh(t)$ pour un $t \in \mathbb{R}$. Alors $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ envoie (x_0, y) sur $(1,0)$. En la complétant par un bloc diagonal I_{n-1}, on obtient une matrice M_2 envoyant $(x_0, y, 0, \dots, 0)$ sur a. De plus, faisant varier t, on voit que $M_2 \in SO_0(1,n)$.

La matrice $M = M_2 M_1$ convient.

2– Le stabilisateur de a dans $SO_0(1,n)$ est $SO(n)$; ainsi, on a $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = SO_0(1,n)/SO(n)$.

3– On remarque que la quadrique $\{x | q(x) = 1\}$ est réunion disjointe de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $-\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. La question précédente montre que ce sont ces composantes connexes, par connexité de $SO_0(1,n)$. Ainsi un élément de $O(1,n)$ peut préserver $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, ou bien échanger ces deux composantes connexes.

On définit une application $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$ par $\Phi(M) = (1, \det M)$ si M préserve $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et $\Phi(M) = (-1, \det M)$ sinon.

La multiplicativité du déterminant, et la discussion ci-dessus montrent que Φ est un morphisme de groupes.

En complétant les matrices $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon, \delta \in \{-1,1\}$ par un bloc diagonal I_{n-1}, on obtient quatre matrices qui prouvent que Φ est surjective.

4– Montrons que $\Phi^{-1}(1,1) = SO_0(1,n)$. Cela montrera que $O(1,n)$ a quatre composantes connexes, à savoir les quatre fibres de Φ.

Soit M telle que $\Phi(M) = (1,1)$. Par la première question, il existe $M' \in SO_0(1,n)$ telle que $M'M(a) = a$. Alors $M'M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Comme $M'M \in O(1,n)$, on a $L = 0$ et $B \in O(n)$. Comme $\det(M) = 1$, $B \in SO(n)$. Par connexité de $SO(n)$, $M'M \in SO_0(1,n)$. On a donc bien $M \in SO_0(1,n)$.

L'autre inclusion est immédiate.

3. Le groupe $SO_0(1,3)$

1– En faisant agir convenablement $SL_2(\mathbb{C})$ sur l'espace des matrices complexes 2×2 hermitiennes, construire un morphisme de groupes de Lie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_0(1,3)$.

2– En déduire un morphisme injectif de groupes de Lie $PSL_2(\mathbb{C}) \to SO_0(1,3)$.

3– Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Solution :

1– Notons V l'espace des matrices complexes 2×2 hermitiennes. Elles sont de la forme $M=\begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & w \end{pmatrix}$. On calcule $\det(M)=xw-y^2-z^2$ de sorte que det est une forme quadratique non dégénérée de signature $(1,3)$ sur V.

On fait agir $SL_2(\mathbb{C})$ sur V par ρ où $\rho(A)\cdot M = AM\ {}^t\overline{A}$. Cette action préserve visiblement la forme quadratique déterminant. On obtient donc un morphisme Φ : $SL_2(\mathbb{C})\to O(1,3)$. Par connexité de $SL_2(\mathbb{C})$, ce morphisme a image dans $SO_0(1,3)$.

2– Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\ker(\Phi)$. Comme A préserve $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b=0$ et $|a|=1$. De même, on montre $c=0$ et$|d|=1$. Finalement, comme A préserve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a\overline{d}=1$.

Utilisant de plus la condition $\det(A)=ad=1$, on a $A=\pm\,\mathrm{Id}$.

Passant au quotient, on obtient un morphisme de groupes de Lie injectif $PSL_2(\mathbb{C})\to SO_0(1,3)$.

3– Par homogénéité, c'est un morphisme de rang constant. Par théorème de forme normale, comme il est injectif, c'est une immersion. Comme ces deux groupes de Lie sont de même dimension 6, c'est donc un difféomorphisme local. Son image est alors un sous-groupe ouvert de $SO_0(1,3)$. Comme $SO_0(1,3)$ est connexe, c'est $SO_0(1,3)$ tout entier.

4. Orbites

1– Soit G un groupe de Lie compact agissant de manière C^∞ sur une variété M. Montrer que les orbites de M sont des sous-variétés fermées de M.

2– Ces orbites sont-elles nécessairement toutes de la même dimension ?

3– Le résultat reste-t-il vrai si G n'est pas supposé compact ?

Solution :

1– Soit $x\in M$, et considérons l'orbite de x. Il suffit de montrer qu'elle est une sous-variété au voisinage de x. L'application $\psi : G\to M$, $g\mapsto gx$ est de rang constant comme on le voit en utilisant les applications de translation sur G. Notons $G_x=\psi^{-1}(x)$: par forme normale des applications de rang constant, c'est un sous-groupe de Lie de G.

Toujours par forme normale des applications de rang constant, il existe un voisinage ouvert V de Id tel que $\psi(V)$ soit une sous-variété de G au voisinage de x. Or $\psi(V)=\psi(G_xV)$. Notons $K=G\setminus(G_xV)$: c'est un fermé de G donc un compact. Son image $\psi(K)$ est donc un compact, qui ne peut rencontrer x par définition de G_x. Ainsi, il existe un voisinage U de x ne rencontrant pas $\psi(K)$.

Sur U, $\psi(G)$ et $\psi(G_xV)=\psi(V)$ coïncident : l'orbite $\psi(G)$ de x est donc bien une sous-variété de M au voisinage de x.

2– Non : on peut faire agir $SO(N)$ sur $\mathbb{R}^N$ linéairement.

3– Non : on prend $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et on fait agir $G = \mathbb{R}$ par translation suivant une direction de pente irrationnelle.

5. Quaternions

1– Montrer que les matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$ forment une algèbre à division de dimension réelle 4 ; on la note $\mathbb{H}$, c'est l'algèbre des quaternions.

2– Montrer que det est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{H}$.

3– Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbb{H}$.

4– On note $\mathbb{H}^1$ les quaternions de déterminant 1. Montrer que $\mathbb{H}^1$ est un groupe de Lie isomorphe à $\mathrm{SU}(2)$.

5– On identifie $\mathbb{R}^3$ aux quaternions de trace nulle. Si s est un quaternion de déterminant 1 et h un quaternion de trace nulle, on pose $\rho(s)(h) = shs^{-1}$. Montrer que cette action induit un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

6– On considère l'action ρ' de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ définie par $\rho'(s,t)(q) = sqt^{-1}$. En déduire un isomorphisme de groupes de Lie $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{SO}(4)$.

7– Construire un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{PSO}(4)$.

Solution :

1– La plupart des vérifications sont immédiates. La stabilité par produit se voit par calcul. Le déterminant d'une telle matrice est $|u|^2+|v|^2$ et est donc un réel strictement positif si la matrice est non nulle. Alors, la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 montre la stabilité par inverse.

2– Soit M un quaternion. Si $u = a+bi$ et $v = c+di$, il vient $\det(M) = a^2+b^2+c^2+d^2$. C'est bien une forme quadratique définie positive.

3– Le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est une variété comme ouvert de $\mathbb{H}$. La multiplication matricielle et la formule pour l'inverse d'une matrice 2×2 montrent que le produit et l'inverse sont C^∞. Le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est donc un groupe de Lie. Son algèbre de Lie s'identifie naturellement à $\mathbb{H}$ car c'est un ouvert de $\mathbb{H}$.

4– C'est une vérification directe.

5– C'est précisément ce qu'on a démontré à l'exercice 1 du TD précédent.

6– On obtient un morphisme de groupes de Lie $\Phi : SU(2) \times SU(2) \to GL(\mathbb{H})$. La forme quadratique définie positive det est préservée par cette action (car on fait agir des matrices de déterminant 1). On a donc construit un morphisme de groupes de Lie C^∞ $\Phi : SU(2) \times SU(2) \to O(4)$. Par connexité de $SU(2)$, ce morphisme prend ses valeurs dans $SO(4)$.

Soit $(s,t) \in \ker(\Phi)$. En choisissant $q = \mathrm{Id}$, on voit que $s = t$. En se restreignant aux quaternions de trace nulle et en utilisant la question précédente, il vient $(s,t) = \pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$. On obtient donc un morphisme injectif de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{SO}(4)$. Par homogénéité, c'est un morphisme de rang constant.

Par théorème de forme normale, comme il est injectif, c'est une immersion. Comme ces deux groupes de Lie sont de même dimension 6, c'est ,donc un difféomorphisme local. Son image est alors un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SO}(4)$. Comme $SO(4)$ est connexe, c'est $SO(4)$ tout entier.

7– L'image par l'isomorphisme de la question précédente de $(-\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ est $-\mathrm{Id}$. Passant au quotient par cet élément d'ordre 2, et utilisant l'isomorphisme de la question 5, on obtient bien un isomorphisme $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{PSO}(4)$.

6. Le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$

Soit $S \subset SL_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices qui sont symétriques définies positives. On notera $G = \mathbb{R} \times S$, et $e = (0, \mathrm{Id}) \in G$.

1– Montrer que S est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

2– Montrer que la multiplication $SO_2(\mathbb{R}) \times S \to SL_2(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme.

3– Identifions $SO_2(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et considérons l'application C^∞ induite $\pi : G \to SL_2(\mathbb{R})$. Montrer que G peut être muni d'une structure de groupe de Lie avec élément neutre e de sorte que $\pi : G \to SL_2(\mathbb{R})$ soit un morphisme de groupes de Lie.

Indication : on pourra, pour définir le produit de $x, y \in G$, choisir des chemins dans G reliant e à x et y.

4– Montrer que l'algèbre de Lie de G est naturellement isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, et admet une base H, A, B telle que $[H, A] = 2A$, $[H, B] = -2B$ et $[A, B] = H$.

5– Soit $u : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \simeq M_n(\mathbb{C})$ un morphisme d'algèbres de Lie complexes. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de $u(H)$. Soit W le plus petit sous-espace de $\mathbb{C}^n$ contenant v et stable par $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $u(H)|_W$ est diagonalisable et décrire les matrices de $u(H)|_W$, $u(A)|_W$ et $u(B)|_W$ dans une base de vecteurs propres pour $u(H)|_W$.

6– On admet que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par $\mathrm{Im}(u)$ admet un supplémentaire stable par $\mathrm{Im}(u)$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes de Lie $SL_2(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ induisant u.

7– Montrer que G n'est pas isomorphe à un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$.

Solution :