Géométrie Différentielle, TD 14 du 31 mai 2013

1. Un groupe de Lie n'a pas de petit sous-groupe

Soit G un groupe de Lie, e son élément neutre et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1– Construire des voisinages bornés $T \subset U$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tels que $\exp : U \to W := \exp(U)$ soit un difféomorphisme, et tels que pour tous $v, w \in T$, $v + w \in U$.

2– Montrer qu'il existe un voisinage de e dans G ne contenant pas d'autre sous-groupe de G que $\{e\}$.

2. Espace hyperbolique réel

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $O(1,n)$ le groupe orthogonal de cette forme quadratique et $SO_0(1,n)$ la composante connexe de l'identité de $O(1,n)$. On considère $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0, \ldots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$: c'est l'espace hyperbolique réel de dimension n.

1– Montrer que $SO_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$.

2– Quel est le stabilisateur d'un point de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ pour cette action ?

3– Construire un morphisme de groupes surjectif $\Phi : O(1,n) \to \{-1,1\} \times \{-1,1\}$.

4– En déduire le nombre de composantes connexes de $O(1,n)$.

3. Le groupe $SO_0(1,3)$

1– En faisant agir convenablement $SL_2(\mathbb{C})$ sur l'espace des matrices complexes 2×2 hermitiennes, construire un morphisme de groupes de Lie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_0(1,3)$.

2– En déduire un morphisme injectif de groupes de Lie $PSL_2(\mathbb{C}) \to SO_0(1,3)$.

3– Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

4. Orbites

1– Soit G un groupe de Lie compact agissant de manière C^∞ sur une variété M. Montrer que les orbites de M sont des sous-variétés fermées de M.

2– Ces orbites sont-elles nécessairement toutes de la même dimension ?

3– Le résultat reste-t-il vrai si G n'est pas supposé compact ?

5. Quaternions

1– Montrer que les matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}$ forment une algèbre à division de dimension réelle 4 ; on la note $\mathbb{H}$, c'est l'algèbre des quaternions.

2– Montrer que det est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{H}$.

3– Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbb{H}$.

4– On note $\mathbb{H}^1$ les quaternions de déterminant 1. Montrer que $\mathbb{H}^1$ est un groupe de Lie isomorphe à $\mathrm{SU}(2)$.

5– On identifie $\mathbb{R}^3$ aux quaternions de trace nulle. Si s est un quaternion de déterminant 1 et h un quaternion de trace nulle, on pose $\rho(s)(h) = shs^{-1}$. Montrer que cette action induit un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

6– On considère l'action ρ' de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ définie par $\rho'(s,t)(q) = sqt^{-1}$. En déduire un isomorphisme de groupes de Lie $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\pm(\mathrm{Id}, \mathrm{Id}) \to \mathrm{SO}(4)$.

7– Construire un isomorphisme de groupes de Lie $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{PSO}(4)$.

6. Le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$

Soit $S \subset SL_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices qui sont symétriques définies positives. On notera $G = \mathbb{R} \times S$, et $e = (0, \mathrm{Id}) \in G$.

1– Montrer que S est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

2– Montrer que la multiplication $SO_2(\mathbb{R}) \times S \to SL_2(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme.

3– Identifions $SO_2(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et considérons l'application C^∞ induite $\pi : G \to SL_2(\mathbb{R})$. Montrer que G peut être muni d'une structure de groupe de Lie avec élément neutre e de sorte que $\pi : G \to SL_2(\mathbb{R})$ soit un morphisme de groupes de Lie.

Indication : on pourra, pour définir le produit de $x, y \in G$, choisir des chemins dans G reliant e à x et y.

4– Montrer que l'algèbre de Lie de G est naturellement isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, et admet une base H, A, B telle que $[H,A] = 2A$, $[H,B] = -2B$ et $[A,B] = H$.

5– Soit $u : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \simeq M_n(\mathbb{C})$ un morphisme d'algèbres de Lie complexes. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de $u(H)$. Soit W le plus petit sous-espace de $\mathbb{C}^n$ contenant v et stable par $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $u(H)|_W$ est diagonalisable et décrire les matrices de $u(H)|_W$, $u(A)|_W$ et $u(B)|_W$ dans une base de vecteurs propres pour $u(H)|_W$.

6– On admet que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par $\mathrm{Im}(u)$ admet un supplémentaire stable par $\mathrm{Im}(u)$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes de Lie $SL_2(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ induisant u.

7– Montrer que G n'est pas isomorphe à un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$.