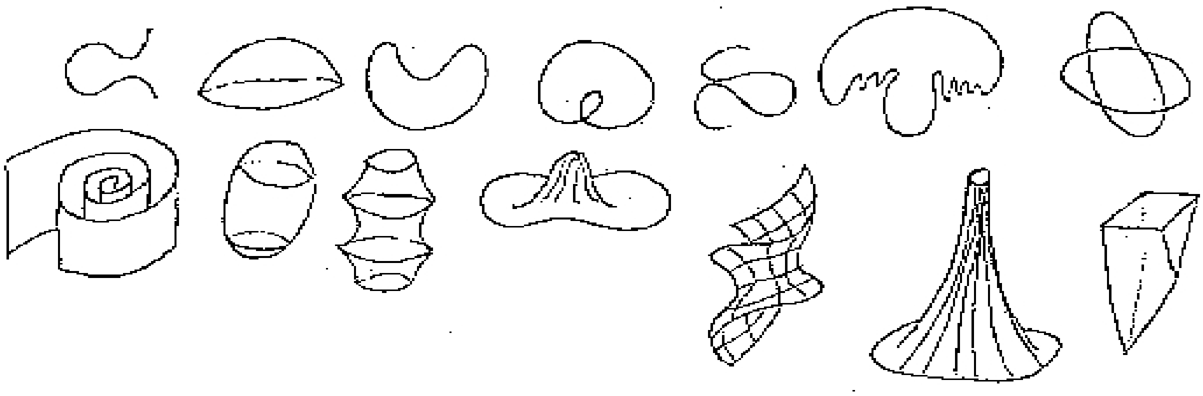
**Géométrie Différentielle, TD 1 du 15 février 2013**

## 1. Exemples et contre-exemples de sous-variétés

Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dire, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés $C^\infty$.



## 2. Lignes de niveau

Montrer que les lignes de niveau de la fonction suivante :

$$F(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2+(1-x^2-y^2)^2}$$

sont des sous-variétés $C^\infty$ de $\mathbb{R}^3$. Préciser leurs dimensions. Faire un dessin.

## 3. Sphère et tore

1– Soit $n \geqslant 1$. Montrer que la sphère unité est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Soit $0 < \rho < r$. Montrer que

$$T = \{((r+\rho\cos(\theta))\cos(\varphi), (r+\rho\cos(\theta))\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)), (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

## 4. Un angle n'est pas une sous-variété

1– Montrer que l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \geqslant 0, \text{ ou } x \geqslant 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. On pourra raisonner par l'absurde, et obtenir une contradiction en utilisant le théorème des fonctions implicites.

2– Donner cependant un exemple d'application $C^\infty$ injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image $A$.

## 5. Sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$

Soient $0 \leqslant r \leqslant n$ des entiers, avec $n \geqslant 2$.

1– Montrer que det : $A \mapsto \det(A)$ est $C^\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$, et caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de det est non nulle.

2– En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété $C^\infty$ de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer de même que l'ensemble des matrices de rang $n-1$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

3– Montrer qu'il existe un voisinage $U$ de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que, si $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$, alors la matrice $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est de rang $r$ si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

4– Soit $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de rang $r$. Montrer que c'est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ et calculer sa codimension.

5– Montrer que les matrices symétriques de rang $r$ forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Calculer sa codimension.

6– Montrer que les projecteurs orthogonaux de rang $r$ forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques, de dimension $r(n-r)$.

7– Montrer que les matrices de rang $\leqslant n-1$ ne forment pas une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$. On pourra par exemple considérer ce qui se passe en 0.

## 6. Lemme de Morse

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$ telle que $f(0) = 0$, et $df_0 = 0$. On suppose que $d^2 f_0$ (qui est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$) est non dégénérée, de signature $(p, q)$.

On va montrer le lemme de Morse : au voisinage de l'origine, après changement de coordonnées, $f$ s'écrit $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$.

1– Montrer l'existence de fonctions $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de classe $C^2$ telles que $f(x) = \sum x_i g_i(x)$.

2– Montrer l'existence de fonctions $(h_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de classe $C^1$ telles que $f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}(x)$ et $h_{ij} = h_{ji}$. Autrement dit, en notant $A(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $f(x) = \langle A(x)x, x \rangle$ (et $A(0) = \frac{1}{2} d^2 f_0$).

3– Soient $E$ l'espace des matrices carrées de taille $n$, et $F$ l'espace des matrices symétriques de taille $n$. Soit $Q \in F$ non dégénérée. En considérant $\xi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ A & \mapsto & {}^t AQA \end{array} \right.$, montrer l'existence d'une application $\varphi$ $C^\infty$ définie sur un voisinage $U$ de $Q$ dans $F$ et à valeurs dans $E$ telle que $\varphi(Q) = \mathrm{Id}$ et, pour tout $q \in U$, ${}^t\varphi(q) Q \varphi(q) = q$.

4– Construire un changement de coordonnées local au voisinage de 0 tel que, après changement de coordonnées, $f$ s'écrive $f(x_1, \ldots, x_n) = \langle \frac{1}{2} d^2 f_0 x, x \rangle$.

5– Conclure.