

Géométrie Différentielle, TD 2 du 22 février 2013

1. Intersection de sous-variétés

Soient M et N deux sous-variétés C^∞ de \mathbb{R}^d de dimensions respectives m et n .

- 1- Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_x M + T_x N = \mathbb{R}^d$, alors $M \cap N$ est une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^d . Préciser sa dimension et son espace tangent en x . On dit alors que M et N sont **transverses**.
- 2- La réciproque est-elle vraie ?
- 3- Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_x M + T_x N)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors $M \cap N$ est nécessairement une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^d ?

2. Polynômes

Soit $n \geq 1$. Notons $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\leq n$.

- 1- Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n , est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}_n[X]$, et indiquer sa dimension.
- 2- Montrer que, si $n \geq 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'espace tangent en 0.
- 3- Montrer que la fonction qui associe à un élément de E son unique racine est C^∞ .

3. Le groupe SU_N

- 1- Expliquer pourquoi, pour montrer que SL_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, il suffit de le vérifier au voisinage de Id.
- 2- Montrer que SL_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.
- 3- De même, montrer que U_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.
- 4- SL_N et U_N sont-ils transverses en Id ?
- 5- Montrer que le groupe SU_N est une sous-variété C^∞ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

4. Maximum

Soit $n \geq 2$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. On considère la fonction $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, et on définit :

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}.$$

- 1– Montrer que $f|_{\mathcal{E}}$ possède une valeur maximale.
- 2– Quelle est la valeur de ce maximum ?

5. Projections

Soit M une sous-variété C^∞ de dimension m de \mathbb{R}^n . Si $p \in \mathbb{R}^n$ est non nul, on note $\pi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la projection orthogonale depuis p .

- 1– On suppose $n > 2m + 1$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ soit injective. On pensera à appliquer le théorème de Sard.
- 2– On note TM le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ constitué des (x, v) tels que $x \in M$ et v soit tangent à M en x . Montrer que TM est une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^{2n} et préciser sa dimension.
- 3– On suppose $n > 2m$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ soit immersive.
- 4– On suppose $n > 2m + 1$ et M compacte. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p(M)$ soit une sous-variété de \mathbb{R}^{n-1} et π_p réalise un C^∞ -difféomorphisme $M \rightarrow \pi_p(M)$.

6. Duale d'une quadrique

Soit V un espace vectoriel réel de dimensions finie, et q une forme quadratique sur V .

- 1– Montrer que q est une submersion sur $V \setminus \{0\}$ si et seulement si q est non dégénérée.
- 2– Supposons maintenant q non dégénérée. Notons $Q = \{x \in V \setminus \{0\} \mid q(x) = 0\}$ la quadrique correspondante. Montrer qu'un hyperplan affine de V ne passant pas par l'origine intersecte Q transversalement.
- 3– Montrer que l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in V^* \setminus \{0\}$ telles que $\{\lambda = 0\}$ n'intersecte pas $Q \setminus \{0\}$ transversalement est une quadrique.
- 4– On note Q^* cette quadrique : c'est la quadrique duale de Q . Montrer que $Q^{**} = Q$.