

Géométrie Différentielle, TD 4 du 8 mars 2013

1. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte C^∞ de \mathbb{R}^{n+1} . On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à $T_x M$ pour le produit scalaire canonique.

- 1- Montrer que ψ est C^∞ .
- 2- Montrer que ψ est surjective.

2. Les sous-variétés comme lignes de niveau

Soit M une variété C^∞ et $N \subset M$ une sous-variété fermée C^∞ de M .

- 1- Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans M et une fonction C^∞ $F_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.
- 2- Montrer qu'il existe une fonction C^∞ $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

3. Connexité

Soit Y une variété connexe de dimension n et X une sous-variété de Y de dimension $\leq n - 2$. Montrer que $Y - X$ est connexe.

4. Plongements

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application C^∞ entre variétés.

- 1- Montrer que si f est une immersion injective propre, $f(X)$ est une sous-variété de Y .
- 2- Montrer que c'est faux si l'on enlève une des trois hypothèses.
- 3- Plus généralement, montrer que si f est une immersion propre dont les fibres non vides ont cardinal constant d , $f(X)$ est une sous-variété de Y .

5. Plongements du plan projectif

On pourra utiliser le quatrième exercice de cette feuille de TD.

- 1- Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}yz)$.
Montrer que $M = \Phi(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^6 .
- 2- Montrer que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de \mathbb{S}^5 , difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

- 3– On identifie \mathbb{R}^n avec l'espace des polynômes en T de degré au plus $n - 1$. En utilisant l'application $\chi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^5 \\ x + yT + zT^2 & \mapsto (x + yT + zT^2)^2 \end{cases}$, construire un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{S}^4 .

6. Fibration de Hopf

- 1– Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{C} . Montrer qu'il est muni d'une structure de variété C^∞ par les paramétrages locaux $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto x + iy \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto \frac{1}{x+iy} \end{cases}$.
- 2– On identifie \mathbb{S}^3 avec la sphère unité de \mathbb{C}^2 . On définit alors une action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^3 par $\theta \cdot (z_1, z_2) = (e^{2i\pi\theta} z_1, e^{2i\pi\theta} z_2)$ pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. Pour tout $z = (z_1, z_2)$, montrer que $\theta \mapsto \theta \cdot z$ est un plongement (i.e. une immersion injective propre) de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^3 .
- 3– On définit une application $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ par $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$. Montrer que cette application est C^∞ et submersive. Quelles sont ses fibres ?
- 4– Montrer que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times \mathbb{S}^1$ tel que $\pi \circ \psi^{-1} : U \times \mathbb{S}^1 \rightarrow U$ est la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre \mathbb{S}^1* .

7. Ruban de Möbius

Le **rang** d'un fibré vectoriel est la dimension des espaces vectoriels fibres de ce fibré vectoriel.

- 1– Soit X une variété C^∞ de dimension n . Montrer que $X \times \mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel de rang 1 sur X . On dit qu'un fibré vectoriel de rang 1 isomorphe à celui-ci est **trivial**.
- 2– Soit $p : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de rang 1 sur X . Montrer que E est trivial si et seulement si il existe une application C^∞ $s : X \rightarrow E$ telle que $p \circ s = \text{Id}$ et $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.
- 3– Identifions \mathbb{S}^1 au cercle unité dans \mathbb{C} , de sorte que $z \mapsto -z$ est une involution sans point fixe de \mathbb{S}^1 . Quel est le quotient $\pi : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ par cette involution ?
- 4– Soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ le fibré vectoriel de rang 1 trivial sur \mathbb{S}^1 . Montrer que le quotient de ce fibré vectoriel par l'involution $(z, t) \mapsto (-z, -t)$ est un fibré vectoriel E de rang 1 sur X .
- 5– Montrer que $E \rightarrow X$ n'est pas un fibré vectoriel trivial.