

## Géométrie Différentielle, TD 5 du 15 mars 2013

### 1. Formes différentielles sur un quotient

---

Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$  et  $G$  un groupe agissant librement et proprement discontinument par  $C^\infty$ -difféomorphismes sur  $X$ . On note  $p : X \rightarrow X/G$  l'application quotient.

- 1- Soit  $k \geq 0$ . Montrer que  $p^* : \Omega^k(X/G) \rightarrow \Omega^k(X)$  est injective.
- 2- Montrer que l'image de  $p^* : \Omega^k(X/G) \rightarrow \Omega^k(X)$  est l'ensemble  $\Omega^k(X)^G$  des formes  $G$ -invariantes.

#### Solution :

- 1- Comme  $p^*$  est linéaire, il suffit de vérifier que son noyau est trivial, i.e. que  $p^*$  envoie une forme non nulle sur une forme non nulle.

Soit  $\omega \in \Omega^k(X/G)$  non nulle. Soit  $y \in X/G$  tel que  $\omega_y$  soit non nul. Soit  $x$  un antécédent de  $y$  par  $p$ . Comme  $p$  est un difféomorphisme local,  $d_x p$  est un isomorphisme, qui identifie donc  $T_x X$  et  $T_y X/G$ . Via cette identification,  $\omega_y$  et  $(p^*\omega)_x$  coïncident, de sorte que  $(p^*\omega)_x$  est non nul. On a bien  $p^*\omega \neq 0$ .

- 2- Soit  $g \in G$ . Comme  $p \circ g = p$ ,  $g^*p^*\omega = p^*\omega$ , de sorte que  $p^*\omega$  est  $G$ -invariante. Réciproquement, soit  $\omega$  une forme  $G$ -invariante sur  $X$ . Soit  $y \in X/G$ . On choisit  $x$  un antécédent de  $y$ , et on pose  $\alpha_y = ((d_x p)^{-1})^*\omega_x$ . Comme  $\omega$  est  $G$ -invariante,  $\alpha_y$  ne dépend pas du choix de  $x$ .

Pour montrer que  $\alpha$  est  $C^\infty$ , on choisit des voisinages  $U$  et  $V$  de  $x$  et de  $y$  tels que  $p$  réalise un difféomorphisme entre  $U$  et  $V$ . Alors  $\alpha|_V = ((p|_U)^{-1})^*\omega|_U$ , ce qui montre que  $\alpha|_V$  est  $C^\infty$ , comme voulu.

Finalement, par construction, on a bien  $\omega = p^*\alpha$ .

### 2. Formes différentielles $SL(n, \mathbb{R})$ -invariantes

---

Soit  $\omega$  la  $n - 1$ -forme différentielle sur  $\mathbb{R}^n$  donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

- 1- Calculer  $d\omega$ .
- 2- Montrer que  $\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ .
- 3- Soit  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire. Que vaut  $A^*\omega$  ?
- 4- Montrer que  $\omega$  est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré  $n - 1$  invariante par  $SL(n, \mathbb{R})$ .

- 5– Montrer en revanche que, si  $n \geq 3$ , toute 1-forme différentielle invariante par  $SL(n, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$  est nulle.

**Solution :**

- 1– Dans  $d\omega$ , tous les termes donnent, après être réordonnés, un  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Ainsi,

$$d\omega = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

- 2– C'est le développement du déterminant par rapport à la première colonne.

- 3– On calcule :

$$\begin{aligned} (A^*\omega)(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \omega(Ax) \cdot (A\xi_1, \dots, A\xi_{n-1}) = \det(Ax, A\xi_1, \dots, A\xi_{n-1}) \\ &= \det(A) \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(A) \omega(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

i.e.  $A^*\omega = \det(A)\omega$ .

- 4– La question précédente montre que  $\omega$  est invariante sous  $SL(n, \mathbb{R})$ . Pour montrer l'unicité, notons  $x = (1, 0, \dots, 0)$ . La forme alternée  $\omega_x$  détermine uniquement  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  par homogénéité, donc sur tout  $\mathbb{R}^n$  par continuité. Il reste à vérifier que  $\omega_x$  est uniquement déterminée, à une constante multiplicative près. On peut pour cela l'écrire en coordonnées et écrire les conditions données par l'invariance de sous le stabilisateur de  $x$  dans  $SL(n, \mathbb{R})$ . C'est un calcul explicite.
- 5– Une 1-forme invariante  $\omega$  est uniquement déterminée par  $\omega_{e_1}$  où  $e_1$  est le premier vecteur de coordonnées. En effet, par invariance,  $\omega_{e_1}$  détermine uniquement  $\omega|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ , donc, par continuité,  $\omega$  toute entière. Il suffit donc de vérifier que  $\omega_{e_1} = 0$ .  
Or  $\omega_{e_1}$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  invariante par le sous-groupe  $G$  de  $SL(n, \mathbb{R})$  stabilisant  $e_1$ . Son noyau est de dimension  $\geq 2$  et est  $G$ -invariant. On vérifie aisément que le seul tel sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  est  $\mathbb{R}^n$  tout entier, de sorte que  $\omega_{e_1} = 0$ .

### 3. Le fibré des formes différentielles

---

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$  et  $0 \leq k \leq n$ . Notons  $\Omega^k M$  l'ensemble des couples  $(x, \omega)$  où  $x \in M$  et  $\omega$  est une  $k$ -forme linéaire alternée sur  $T_x M$ .

- 1– Montrer que  $\Omega^k M$  a une structure naturelle de fibré vectoriel sur  $M$ .
- 2– Montrer qu'il y a une bijection naturelle entre  $\Omega^k(M)$  et l'ensemble des sections  $C^\infty$   $s : M \rightarrow \Omega^k M$  de ce fibré vectoriel.
- 3– Montrer que  $M$  est orientable si et seulement si il existe  $\omega \in \Omega^n(M)$  nulle part nulle.
- 4– En déduire que  $M$  est orientable si et seulement si  $\Omega^n M$  est un fibré vectoriel trivial.

**Solution :**

- 1– On note  $p : \Omega^k M \rightarrow M$  la projection. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un ouvert de cartes de  $M$ . Le pull back induit une bijection  $\psi : p^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$ . On choisit ces applications comme cartes de fibré. La formule pour le pull-back d'une forme différentielle montre que les changements de carte de fibrés sont de la forme voulue, c'est-à-dire  $C^\infty$  et linéaires entre les fibres. On a donc bien muni  $\Omega^k M$  d'une structure de fibré vectoriel.
- 2– Il y a une bijection entre « le choix d'une  $k$ -forme linéaire alternée en tout point », et les sections ensemblistes  $s : M \rightarrow \Omega^k M$ . Il reste à vérifier que les conditions d'être  $C^\infty$  sont équivalentes dans les deux cas. C'est une question locale ; on peut donc travailler dans une carte de fibré, où c'est évident (par définition de ce qu'est une  $k$ -forme différentielle).
- 3– Si il existe une telle section  $\omega$ , on construit une orientation en choisissant pour cartes orientées les cartes qui envoient  $\omega$  sur un multiple positif de la forme déterminant sur  $\mathbb{R}^n$ .  
Réciproquement, si  $M$  est orientée, on construit  $\omega$  localement en tirant en arrière par des cartes orientées la forme déterminant sur  $\mathbb{R}^n$ , et en recollant globalement à l'aide d'une partition de l'unité.
- 4– C'est une conséquence de la question précédente et de la question 2 de l'exercice 7 du TD4.

#### 4. Le fibré cotangent

---

On reprend les notations de l'exercice précédent et on note  $\pi : \Omega^1 M \rightarrow M$  la projection naturelle.

- 1– Montrer qu'il existe une unique 1-forme différentielle  $\alpha$  sur  $\Omega^1 M$  telle que pour tout  $(x, \omega) \in \Omega^1 M$ , et tout  $v \in T_{(x, \omega)}(\Omega^1 M)$ ,  $\alpha_{(x, \omega)}(v) = \omega(d_x \pi(v))$ .
- 2– Montrer que  $d\alpha$  est nulle part dégénérée, et que  $(d\alpha)^{\wedge n}$  est nulle part nulle.
- 3– En déduire que  $\Omega^1 M$  est orientable.

#### Solution :

- 1– Il faut vérifier le caractère  $C^\infty$  de  $\alpha$ , ce qui est facile à voir dans des cartes locales. L'unicité de  $\alpha$  est évidente.
- 2– Là encore, un calcul en cartes locales montre cela immédiatement.
- 3– C'est une conséquence de la question 3 de l'exercice précédent.

#### 5. Mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$

---

Soit  $U = GL_n(\mathbb{R})$  vu comme ouvert de  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ . On définit une forme volume  $\omega$  sur  $U$  par  $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n} \omega_0$ , où  $\omega_0$  est la forme volume standard sur  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Montrer que  $\omega$  est invariante par multiplication à gauche ou à droite par des matrices, et que c'est la seule forme volume sur  $GL_n(\mathbb{R})$  à avoir cette propriété (à multiplication par un scalaire près).

#### Solution :

Si  $\varphi$  est un difféomorphisme local, on sait que  $\varphi^*(f\omega_0)(x) = J\varphi(x)f(\varphi(x))\omega_0$ , où  $J\varphi$  est le jacobien de  $\varphi$ , i.e. le déterminant de sa différentielle.

Ici,  $\varphi$  est la multiplication à gauche par une matrice  $M$  (le cas de la multiplication à droite étant analogue), qui est linéaire donc égale à sa différentielle. Soit  $E_{ij}$  la matrice élémentaire qui a un 1 en position  $(i, j)$  et des 0 ailleurs. Quand  $M$  est diagonale,  $ME_{ij} = M_{ii}E_{ij}$ , si bien que dans la base des  $E_{ij}$  la multiplication par  $M$  est diagonale, et son déterminant est  $\prod (M_{ii})^n = \det(M)^n$ . On en déduit le même résultat quand  $M$  est diagonalisable puis, par densité (quitte à passer sur  $\mathbb{C}$ ), quand  $M$  est quelconque. Ainsi,  $J\varphi(A) = \det(M)^n$ , puis

$$\varphi^*\omega(A) = \det(M)^n \det(AM)^{-n} \omega_0 = \det(A)^{-n} \omega_0 = \omega(A),$$

i.e  $\omega$  est invariante.

Pour l'unicité, si  $\omega(A) = f(A)\omega_0$  est invariante, on peut supposer que  $f(I_n) = 1$ . En écrivant la même équation d'invariance que ci-dessus, on en déduit  $f(A) = \det(A)^{-n}$ .

Remarque : dès qu'un groupe agit transitivement (i.e.  $\forall x, y, \exists g, g(x) = y$ ), il y a de même au plus une forme volume invariante par le groupe, pour les mêmes raisons.

6.

Soit  $\omega$  une 1-forme ne s'annulant pas sur une variété  $M$ . Montrer qu'il existe une 1-forme  $\theta$  sur  $M$  telle que  $d\omega = \theta \wedge \omega$  si et seulement si  $d\omega \wedge \omega = 0$ . Que se passe-t-il si  $\omega$  admet des zéros?

**Solution :**

L'implication  $\Rightarrow$  est évidente. Pour l'autre implication, montrons d'abord le résultat au voisinage d'un point  $p$  arbitraire. Comme  $\omega(p) \neq 0$ , on peut le compléter par  $\omega_2, \dots, \omega_n$  en une base du dual de  $\mathbb{R}^n$ . Comme le fait d'être une base est ouvert,  $(\omega(x), \omega_2, \dots, \omega_n)$  reste une base pour  $x$  proche de  $p$ . Décomposons  $d\omega$  sur la base des  $\omega_i \wedge \omega_j$  (pour  $i < j$ , et en notant  $\omega_1 = \omega$ ). Comme  $d\omega \wedge \omega = 0$ , on obtient que les coefficients des  $\omega_i \wedge \omega_j$  sont nuls pour  $i, j \geq 2$ , i.e.  $d\omega = \theta \wedge \omega$  pour un certain  $\theta$ .

Pour chaque point  $p$ , on a construit un ouvert  $U_p$  voisinage de  $p$  sur lequel  $d\omega = \theta_p \wedge \omega$  pour une certaine 1-forme  $\theta_p$ . La théorie des partitions de l'unité assure qu'il existe des fonctions  $\varphi_p \in C^\infty$  à support dans  $U_p$  telles que, au voisinage de chaque point, seul un nombre fini de ces fonctions soit non nul, et avec  $\sum \varphi_p = 1$ . Posons alors  $\theta = \sum \varphi_p \theta_p$ , il vérifie bien  $d\omega = \theta \wedge \omega$ .

Si  $\omega$  admet des zéros, le résultat n'est plus vrai : considérer la 1-forme  $x_1 dx_2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 7. Formes décomposables

On dira qu'une  $k$ -forme linéaire alternée  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^n$  est décomposable s'il existe une 1-forme  $\alpha$  et une  $k-1$ -forme  $\beta$  telles que  $\omega = \alpha \wedge \beta$ . On dira que  $\omega$  est complètement décomposable s'il existe des 1-formes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  avec  $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$ .

- 1– Montrer qu'une  $n$ -forme est toujours complètement décomposable.
- 2– Montrer que, étant données  $\omega$  et  $\alpha \neq 0$  respectivement une  $k$ -forme et une 1-forme, on peut écrire  $\omega$  sous la forme  $\alpha \wedge \beta$  si et seulement si  $\alpha \wedge \omega = 0$ .
- 3– En déduire qu'une forme de degré  $n-1$  est toujours décomposable.
- 4– Montrer que la 2-forme  $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$  sur  $\mathbb{R}^4$  n'est pas décomposable.
- 5– Soit  $\omega$  une  $k$ -forme non nulle, et  $V_\omega = \{\alpha \text{ forme linéaire} \mid \alpha \wedge \omega = 0\}$ . Montrer que c'est un espace vectoriel, et que si  $\alpha_1, \dots, \alpha_i$  est une famille libre de  $V_\omega$ , alors il existe  $\beta$  telle que  $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_i \wedge \beta$ . En déduire que  $\dim V_\omega \leq k$ , avec égalité si et seulement si  $\omega$  est complètement décomposable (dans ce cas, on dit que  $\omega$  représente l'espace vectoriel  $V = V_\omega$ ).
- 6– Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  représentant deux sous-espaces  $V_1$  et  $V_2$ . Montrer que  $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$  si et seulement si  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ , et qu'en ce cas  $\omega_1 \wedge \omega_2$  représente  $V_1 \oplus V_2$ .
- 7– Montrer qu'une forme de degré  $n-1$  est en fait toujours complètement décomposable (on pourra considérer l'application  $\alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$ ).

**Solution :**

- 1– Une  $n$ -forme s'écrit toujours  $\omega = \lambda dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , qui est déjà décomposé !
- 2– Si  $\omega = \alpha \wedge \beta$ , alors  $\alpha \wedge \omega = 0$  car  $\alpha \wedge \alpha = 0$ .  
Réciproquement, supposons que  $\alpha \wedge \omega = 0$ . On complète  $\alpha =: \alpha_1$  avec  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  de manière à former une base de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Alors  $\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$  (pour  $i_1 < \dots < i_k$ ) forme une base de  $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ , si bien qu'on peut écrire  $\omega = \sum \lambda_I \alpha_I$ , où  $I$  est un multiindice de longueur  $k$ . Dans  $\alpha \wedge \omega$ , tous les termes contenant  $\alpha_1$  disparaissent, tandis que les  $\alpha_1 \wedge \alpha_I$ ,  $1 \notin I$ , forment une famille libre de  $\bigwedge^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*$ . Comme  $\alpha \wedge \omega = 0$ , on en déduit que  $\lambda_I = 0$  si  $1 \notin I$ , puis  $\omega = \alpha \wedge \beta$ .
- 3– L'application qui à  $\alpha$  associe  $\alpha \wedge \omega$  est linéaire d'un espace de dimension  $n$  dans un espace de dimension 1, donc son noyau n'est pas réduit à 0, i.e. il existe  $\alpha \neq 0$  telle que  $\alpha \wedge \omega = 0$ . On applique ensuite la question précédente.
- 4– On peut faire un calcul en coordonnées. On peut aussi utiliser le fait que  $\omega \wedge \omega \neq 0$  en utilisant l'exercice précédent, alors que si on pouvait écrire  $\omega = \alpha \wedge \beta$ , on aurait  $\omega \wedge \omega = 0$ .
- 5– Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_i$  sont libres, on les complète pour former une base de l'espace. En écrivant  $\omega = \sum \lambda_I \alpha_I$ , on obtient en faisant le produit extérieur avec  $\alpha_l$  ( $l \leq i$ ) que  $\lambda_I = 0$  si  $l \notin I$ . Ainsi, si  $\lambda_I \neq 0$ ,  $\alpha_I$  se factorise par  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_i$ .
- 6– Soit  $\omega_1 = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{k_1}$  et  $\omega_2 = \alpha_{k_1+1} \wedge \dots \wedge \alpha_{k_1+k_2}$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}$  et  $\alpha_{k_1+1}, \dots, \alpha_{k_1+k_2}$  sont des bases respectivement de  $V_1$  et  $V_2$ .  
Si  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ , alors la famille  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}, \alpha_{k_1+1}, \dots, \alpha_{k_1+k_2}$  est libre, si bien que le produit extérieur  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{k_1+k_2}$  est non nul, i.e.  $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ . Par contre, si  $V_1 \cap V_2$  contient  $\alpha \neq 0$ , alors  $\omega_i$  se met sous la forme  $\alpha \wedge \beta_i$  pour  $i = 1, 2$  (d'après la question 2), si bien que  $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ .
- 7– Soit  $\Phi : \alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$ . Elle va d'un espace de dimension  $n$  dans un espace de dimension 1, donc  $\dim(\text{Ker } \Phi) \geq n - 1$ . Mais  $V_\omega = \text{Ker}(\Phi)$ , donc  $\dim(V_\omega) \geq n - 1$ , ce qui conclut.