

Géométrie Différentielle, TD 5 du 15 mars 2013

1. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété C^∞ de dimension n et G un groupe agissant librement et proprement discontinument par C^∞ -difféomorphismes sur X . On note $p : X \rightarrow X/G$ l'application quotient.

- 1- Soit $k \geq 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(X/G) \rightarrow \Omega^k(X)$ est injective.
- 2- Montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(X/G) \rightarrow \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G -invariantes.

2. Formes différentielles $SL(n, \mathbb{R})$ -invariantes

Soit ω la $n - 1$ -forme différentielle sur \mathbb{R}^n donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n.$$

- 1- Calculer $d\omega$.
- 2- Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$.
- 3- Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?
- 4- Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n - 1$ invariante par $SL(n, \mathbb{R})$.
- 5- Montrer en revanche que, si $n \geq 3$, toute 1-forme différentielle invariante par $SL(n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n est nulle.

3. Le fibré des formes différentielles

Soit M une variété C^∞ de dimension n et $0 \leq k \leq n$. Notons $\Omega^k M$ l'ensemble des couples (x, ω) où $x \in M$ et ω est une k -forme linéaire alternée sur $T_x M$.

- 1- Montrer que $\Omega^k M$ a une structure naturelle de fibré vectoriel sur M .
- 2- Montrer qu'il y a une bijection naturelle entre $\Omega^k(M)$ et l'ensemble des sections C^∞ $s : M \rightarrow \Omega^k M$ de ce fibré vectoriel.
- 3- Montrer que M est orientable si et seulement si il existe $\omega \in \Omega^n(M)$ nulle part nulle.
- 4- En déduire que M est orientable si et seulement si $\Omega^n M$ est un fibré vectoriel trivial.

4. Le fibré cotangent

On reprend les notations de l'exercice précédent et on note $\pi : \Omega^1 M \rightarrow M$ la projection naturelle.

- 1– Montrer qu'il existe une unique 1-forme différentielle α sur $\Omega^1 M$ telle que pour tout $(x, \omega) \in \Omega^1 M$, et tout $v \in T_{(x, \omega)}(\Omega^1 M)$, $\alpha_{(x, \omega)}(v) = \omega(d_x \pi(v))$.
- 2– Montrer que $d\alpha$ est nulle part dégénérée, et que $(d\alpha)^{\wedge n}$ est nulle part nulle.
- 3– En déduire que $\Omega^1 M$ est orientable.

5. Mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$

Soit $U = GL_n(\mathbb{R})$ vu comme ouvert de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. On définit une forme volume ω sur U par $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n} \omega_0$, où ω_0 est la forme volume standard sur \mathbb{R}^{n^2} . Montrer que ω est invariante par multiplication à gauche ou à droite par des matrices, et que c'est la seule forme volume sur $GL_n(\mathbb{R})$ à avoir cette propriété (à multiplication par un scalaire près).

6.

Soit ω une 1-forme ne s'annulant pas sur une variété M . Montrer qu'il existe une 1-forme θ sur M telle que $d\omega = \theta \wedge \omega$ si et seulement si $d\omega \wedge \omega = 0$. Que se passe-t-il si ω admet des zéros ?

7. Formes décomposables

On dira qu'une k -forme linéaire alternée ω sur \mathbb{R}^n est décomposable s'il existe une 1-forme α et une $k-1$ -forme β telles que $\omega = \alpha \wedge \beta$. On dira que ω est complètement décomposable s'il existe des 1-formes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ avec $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$.

- 1– Montrer qu'une n -forme est toujours complètement décomposable.
- 2– Montrer que, étant données ω et $\alpha \neq 0$ respectivement une k -forme et une 1-forme, on peut écrire ω sous la forme $\alpha \wedge \beta$ si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$.
- 3– En déduire qu'une forme de degré $n-1$ est toujours décomposable.
- 4– Montrer que la 2-forme $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ sur \mathbb{R}^4 n'est pas décomposable.
- 5– Soit ω une k -forme non nulle, et $V_\omega = \{\alpha \text{ forme linéaire} \mid \alpha \wedge \omega = 0\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel, et que si $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ est une famille libre de V_ω , alors il existe β telle que $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_i \wedge \beta$. En déduire que $\dim V_\omega \leq k$, avec égalité si et seulement si ω est complètement décomposable (dans ce cas, on dit que ω représente l'espace vectoriel $V = V_\omega$).
- 6– Soient ω_1 et ω_2 représentant deux sous-espaces V_1 et V_2 . Montrer que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ si et seulement si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, et qu'en ce cas $\omega_1 \wedge \omega_2$ représente $V_1 \oplus V_2$.
- 7– Montrer qu'une forme de degré $n-1$ est en fait toujours complètement décomposable (on pourra considérer l'application $\alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$).