Géométrie Différentielle, TD 6 du 22 mars 2013

1. Orientabilité

1– Soient M et N deux variétés de classe C^∞ orientables. Montrer que $M \times N$ est orientable.

2– Soit M une variété de classe C^∞ quelconque. Montrer que la variété TM est orientable.

2. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \dots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \dots, e_d) = 1.$$

Indication : on pourra utiliser au besoin la question suivante.

2– Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ et $a_1, \dots, a_d$ des vecteurs. Alors :

$$(\det(\langle a_i, e_j \rangle_{1 \leqslant i,j \leqslant d}))^2 = \det(\langle a_i, a_j \rangle_{1 \leqslant i,j \leqslant d}).$$

3– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \dots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

4– Calculer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume canonique.

3. Bouteille de Klein

On identifie $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on considère $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On introduit $\sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 : (\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$.

1– Montrer que $K = \mathbb{T}^2 / \langle \mathrm{Id}, \sigma \rangle$ a une structure naturelle de variété de classe C^∞.

2– Montrer que K n'est pas orientable.

3– En admettant que $\mathbb{T}^2$ et $\mathbb{S}^2$ ne sont pas difféomorphes, montrer que K n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

4. Volume d'un quotient

Soit X une variété compacte de dimension n. Soit G un groupe fini agissant librement par C^∞-difféomorphismes sur M. On note $p : X \to X/G$ le quotient.

1– On suppose que X/G est orientée. Montrer que X est munie d'une orientation naturelle.

2– Soit ω une n-forme différentielle sur X/G. Montrer que :
$$\int_X p^*\omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$
On pourra commencer par traiter le cas où ω a support inclus dans un ouvert suffisament petit de X/G.

5. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de $\mathbb{S}^2$ délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de $\mathbb{S}^2$, de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M.

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds. Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M.

Montrer que :
$$\int_{\partial M} n(x)ds + 2\iint_M N(x)da = 0.$$

6. Formule de Cauchy-Crofton

1– On identifie l'ensemble des droites orientées du plan euclidien à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en associant à (θ, p) la droite d'équation $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ de vecteur directeur $(\sin\theta, -\cos\theta)$. Montrer que la forme différentielle $dp \wedge d\theta$ est invariante sous l'action naturelle des isométries affines directes du plan.

2– Soit C une courbe fermée C^∞ du plan, de longueur L paramétrée par son abscisse curviligne s. Soit $F : [0; L] \times [0; \pi] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ l'application qui à (s, φ) associe la droite passant par le point de C d'abscisse curviligne s et faisant un angle φ avec la tangente orientée à C en ce point. Montrer que :
$$F^*(dp \wedge d\theta) = \sin\varphi ds \wedge d\varphi.$$

3– En déduire que pour presque toute droite D, l'ensemble $D \cap C$ est fini, et que
$$\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}} \mathrm{Card}(D \cap C) dp \wedge d\theta = 2L.$$