Géométrie Différentielle, TD 7 du 29 mars 2013

1. Degré d'une application

1– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
–Montrer que f se prolonge en une application C^∞ $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.
–Calculer $\deg(\widetilde{f})$.
–Montrer que f est surjective.

2– Soit M une variété à bord compacte orientée de dimension d, et N une variété compacte orientée de dimension $d-1$.
–Soit $f : M \to N$ une application C^∞. Montrer que $\deg(f|_{\partial M}) = 0$.
–En déduire qu'il n'existe pas d'application $f : M \to \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$.

3– Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes ; on suppose que Q est non nul.
–Montrer que P/Q induit une application C^∞ $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
–Calculer $\deg(f)$.

Solution :

1– Comme f coïncide avec l'identité hors d'un compact, f se prolonge en $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ en posant $\widetilde{f}(\infty) = \infty$. $\widetilde{f}$ est bien C^∞ car f et l'identité sont C^∞.

Soit K ce compact, et soit x une valeur régulière de $\widetilde{f}$ dans l'ouvert complémentaire de $K \cup f(K)$. Alors x possède un et un unique antécédent par $\widetilde{f}$: lui-même. De plus, $d_x\widetilde{f} = \mathrm{Id}$ préserve l'orientation. Ceci montre que $\deg(\widetilde{f}) = 1$.

Alors, si f n'était pas surjective, soit $x \in \mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à son image. C'est une valeur régulière de $\widetilde{f}$ sans antécédents par $\widetilde{f}$. Ceci montre $\deg(\widetilde{f}) = 0$: c'est une contradiction.

2– On choisit ω une forme volume sur N telle que $\int_N \omega = 1$, et on calcule :

$$\int_{\partial M} f|_{\partial M}^* \omega = \int_M df^* \omega = \int_M f^* d\omega = 0,$$

par le théorème de Stokes, et car $d\omega = 0$ pour raisons de degré. Ainsi, $\deg(f|_{\partial M}) = 0$.

Comme $\deg(\mathrm{Id}) = 1$, on en déduit qu'il n'existe pas d'application $f : M \to \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$.

3– Ecrivons $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, où ces deux polynômes sont sans facteurs communs, et où $a_m, b_n \neq 0$. On prolonge la fonction P/Q qui est a priori définie hors des zéros de Q et du point à l'infini $[1:0]$ par la valeur $[1:0]$ en les zéros de Q. On la prolonge également en $[1:0]$ par la valeur $[0:1]$ si $m < n$, la valeur a_m/b_n si $m = n$, et la valeur $[1:0]$ si $m > n$.

On vérifie que cette fonction est C^∞ en utilisant la carte $z \mapsto 1/z$ au voisinage de $[1:0]$. En changeant de carte au but, la nouvelle expression de P/Q est Q/P, qui est bien C^∞ et nulle en les zéros de Q. En changeant de carte à la source, la nouvelle expression de P/Q est $P(1/z)/Q(1/z)$, qui est C^∞ et prend en zéro la bonne valeur si $m \leqslant n$. Le dernier cas se traite de même, en changeant de carte à la source et au but.

La fonction P/Q est holomorphe, donc préserve l'orientation. Le degré de P/Q est donc le cardinal de l'image réciproque d'un élément général λ de $\mathbb{C}$. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ suffisament général (par exemple tel que $P([1:0]) \neq \lambda$, ...). On cherche à compter le nombre de racines de $P(x) - \lambda Q(x)$. Si λ n'est pas de la forme $P(z)/Q(z)$ pour un z tel que $P(z)Q'(z) = Q(z)P'(z)$, ce polynôme est à racines simples, et a donc exactement $\max(m,n)$ racines. Ainsi, $\deg(f) = \max(m,n)$.

2. Applications de la sphère dans elle-même

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré non nul, et supposons n pair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3– Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré nul $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, $f(-x) \neq -f(x)$.

4– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

5– Soit $x \in \mathbb{S}^n$ et $U \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ et une application C^∞ $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tels que f réalise un difféomorphisme entre V et $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, et que $f(\mathbb{S}^n \setminus V) = \{x\}$.

6– Soit $d \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même.

7– Supposons n impair. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier pair. Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même telle que $f(-x) \neq -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$.

Solution :

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ sans point fixe. L'application $(t,x) \mapsto \frac{-tx+(1-t)f(x)}{||-tx+(1-t)f(x)||}$ est alors une homotopie entre f et l'antipodie. Comme l'antipodie a degré $(-1)^{n+1}$, on a $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ telle qu'il n'existe pas $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$. Alors $(t,x) \mapsto \frac{tf(-x)+(1-t)f(x)}{||tf(-x)+(1-t)f(x)||}$ est une homotopie entre f et $x \mapsto f(-x)$. Cette dernière application est de degré $(-1)^{n+1}\deg(f)$: on a donc $\deg(f) = (-1)^{n+1}\deg(f)$. Ainsi, n est impair ou $\deg(f)$ est nul.

3– On peut prendre pour f l'application constante.

4– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ telle qu'il n'existe pas $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$. Alors $(t,x) \mapsto \frac{t/2f(-x)+(1-t/2)f(x)}{||t/2f(-x)+(1-t/2)f(x)||}$ est une homotopie entre f et $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Cette dernière application a toutes ses fibres de cardinal pair. En particulier, son degré pair. Ceci montre que $\deg(f)$ est pair.

5– Quitte à restreindre U, on peut supposer que U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On choisit alors $V = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. D'autre part, on écrit $\mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Il est alors facile de construire $f : U = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ à la main en la choisissant de la forme $y \mapsto \rho(||y||^2)$.

6– Supposons $d \geqslant 0$. On choisit d ouverts disjoints $U_1, \dots, U_d$; on considère des applications $f_1, \dots, f_d$ comme dans la question précédente. Comme l'image réciproque d'un point général de $\mathbb{S}^n$ par f_i a un antécédent, $\deg(f_i)$ vaut 1 ou -1. Quitte à composer au but par une symétrie, on peut supposer que $\deg(f_i) = 1$. Soit f l'application C^∞ qui coïncide avec f_i sur U_i et qui vaut x ailleurs. Par construction, l'image réciproque d'un point $\neq x$ est constituée de d points, et toutes les différentielles préservent l'orientation. Ainsi, $\deg(f) = d$.

Si $d < 0$, on compose au but une application de degré $-d$ avec une symétrie, pour obtenir une application de degré d.

7– Si $d = 2\delta \geqslant 0$ est pair, on choisit δ ouverts $U_1, \dots, U_\delta$ tels que $U_1, \dots, U_\delta, -U_1, \dots, -U_\delta$ soient disjoints. On considère des applications $f_1, \dots, f_\delta$ comme dans la question 3. Comme dans la question ci-dessus, on peut supposer qu'elles sont de degré 1. Comme n est impair, $y \mapsto f_i(-y)$ est de degré 1. Soit f l'application C^∞ qui coïncide avec f_i sur U_i, avec $y \mapsto f_i(-y)$ sur $-U_i$ et qui vaut x ailleurs. L'application f est de degré d et convient.

Si $d < 0$, on compose avec une symétrie l'application de degré $-d$ construite ci-dessus, pour obtenir une application de degré d.

3. Courbure de Gauss

1– Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).

3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$.

4– Montrer qu'on peut trouver une surface C^∞ compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ difféomorphe à $\mathbb{S}^2$ qui possède un point de courbure de Gauss nulle.

Solution :

1– L'application de Gauss est l'identité. Il est donc immédiat de calculer que la courbure est constante égale à 1.

2– Comme S est compacte, on peut trouver un point $x \in S$ à distance maximale de l'origine. Quitte à effectuer une rotation et une homothétie, on peut supposer que $x = (1, 0, 0)$. Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^3$ où S est le lieu des zéros d'une submersion $F : U \to \mathbb{R}$. Quitte à multiplier F par un scalaire, on peut supposer que $\nabla F(x) = e_1$.

L'application $\nabla F : U \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ admet pour différentielle en x la matrice hessienne $\mathrm{Hess}_x(F)$. Comme l'application de Gauss ν est, sur $U \cap S$, la composée de l'inclusion de $U \cap S$ dans U, de l'application ∇F et de la projection $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2$, on calcule la matrice de la différentielle $d_x\nu$:

$$d_x\nu = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_2}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3}(x) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3}(x) & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_3}(x) \end{pmatrix}.$$

Comme $K(x) = \det d_x\nu$, on veut montrer que le déterminant de cette matrice est strictement positif. Pour cela, on va montrer que la forme quadratique $Q(h_2, h_3) = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_2}(x)h_2^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial X_2 \partial X_3}(x)h_2 h_3 + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 X_3}(x)h_3^2$ est définie positive.

Pour cela, choisissons h_2, h_3 petits, et posons $h_1 = -(h_2^2+h_3^2)/4$, de sorte que $(1+h) \notin B(0,1)$. En particulier, comme $S \subset B(0,1)$ par choix de x, on a $F(1+h) \geqslant 0$. Ne retenant que les termes d'ordre minimal dans le développement de Taylor de f (i.e. d'ordre 2 en h_2 et h_3, il vient $Q(h_2, h_3) \geqslant (h_2^2 + h_3^2)/4$, de sorte que Q est définie positive, comme voulu.

3– Par le théorème de Gauss-Bonnet, l'intégrale sur S de la courbure est négative ou nulle (car S n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$). Il existe donc un point y où la courbure est négative ou nulle. Comme la courbure est strictement positive en un point x, la connexité de S assure qu'il existe un point où la courbure s'annule.

4– Il suffit de plonger $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de sorte qu'il existe un ouvert de $\mathbb{S}^2$ dont l'image est contenue dans un plan.

4. Surfaces à courbure négative

1– Soit $T = \{(\cos(v)/\cosh(u), \sin(v)/\cosh(u), u - \tanh(u)), u \in]0, +\infty[, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il s'agit d'une surface C^∞ connexe orientable : la tractricoïde.

2– Montrer que la courbure de Gauss de T est constante égale à -1.

3– Montrer que T est d'aire finie, et la calculer.

4– Soit $H \subset \mathbb{R}^3$ le fermé d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Montrer qu'il s'agit d'une surface C^∞ connexe orientable : l'hyperboloïde à une nappe.

5– Montrer que la courbure de Gauss de H est strictement négative.

6– Montrer que H est d'aire infinie.

Solution :

1– On montre directement que
$\Phi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}, (v,u) \mapsto (\cos(v)/\cosh(u), \sin(v)/\cosh(u), u - \tanh(u))$
est une immersion injective propre, donc un plongement, ce qui conclut.

2– On calcule

$$d_{(v,u)}\Phi(e_1) = (-\frac{\sin(v)}{\cosh(u)}, \frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, 0)$$

et

$$d_{(v,u)}\Phi(e_2) = (-\frac{\tanh(u)}{\cosh(u)}\cos(v), -\frac{\tanh(u)}{\cosh(u)}\sin(v), \tanh(u)^2) :$$

ce sont deux vecteurs orthogonaux de normes respectives $\frac{1}{\cosh(u)}$ et $\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}$. On calcule de plus l'application de Gauss en coordonnées (v,u) : c'est

$$G : (v,u) \mapsto (\tanh(u)\cos(v), \tanh(u)\sin(v), \frac{1}{\cosh(u)}).$$

La courbure de Gauss en $\Phi(v,u)$ est alors donnée par

$$\det(d_{(v,u)}G(\cosh(u)e_1), d_{(v,u)}G(\frac{\cosh(u)}{\sinh(u)}e_2), G(v,u)),$$

qui vaut bien -1 par calcul direct.

3– On a déjà calculé $d_{(v,u)}\Phi(e_1)$ et $d_{(v,u)}\Phi(e_2)$: ce sont deux vecteurs orthogonaux de normes respectives $\frac{1}{\cosh(u)}$ et $\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}$. La formule du changement de variables montre donc que l'aire de T est $\int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{+*}} \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)^2} dvdu$. Appliquant Fubini et effectuant le changement de variables $x = e^u$, on peut calculer cette quantité : elle vaut 2π.

4– On peut utiliser la paramétrisation

$$\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^3, (v,u) \mapsto (\cos(v)\cosh(u), \sin(v)\cosh(u), \sinh(u)),$$

qui est une immersion injective propre, donc un plongement.

5– Là encore c'est un calcul direct.

6– Comme dans la question 3, on se ramène au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, qui est maintenant infinie.

5. Theorema Egregium

On munit $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ de leurs structures euclidiennes canoniques $\langle .,. \rangle$. On admettra dans un premier temps la première question, qui est le Theorema Egregium de Gauss.

1– Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces C^∞ de courbures de Gauss K_U et K_V, et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme. Supposons que pour tout $x \in U$ et pour tout $v, w \in T_xU$, $\langle v, w\rangle = \langle d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)\rangle$. Montrer que pour tout $x \in U$, $K_U(x) = K_V(\varphi(x))$.

2– Soit $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore et $C = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ le cylindre. Montrer que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ induit un produit scalaire canonique sur les espaces tangents en chaque point de T et C.

3– Montrer qu'il est possible de plonger C dans $\mathbb{R}^3$ (resp. T dans $\mathbb{R}^4$) de sorte qu'en tout point $x \in C$ (resp. $x \in T$), le produit scalaire canonique sur T_xC (resp. T_xT) coïncide avec celui induit par $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$).

4– Montrer qu'il est impossible de plonger T dans $\mathbb{R}^3$ de sorte qu'en tout point $x \in T$, le produit scalaire canonique sur T_xT coïncide avec celui induit par $\mathbb{R}^3$.

5– Dans la question 1, φ est-il nécessairement induit par une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$?

6– Le réciproque de la question 1 est-elle vraie ? Plus précisément, en reprenant les notations de la question 1, si φ préserve la courbure de Gauss, φ préserve-t-il nécessairement le produit scalaire euclidien ?

Solution :

1– On peut le prouver directement de manière calculatoire : attention, c'est difficile.

2– Comme l'action par translation de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$) préserve le produit scalaire euclidien, celui-ci induit des produits scalaires canoniques sur les espaces tangents du quotient.

3– On peut plonger C dans $\mathbb{R}^3$ via $(x, y) \mapsto (\sin(2\pi x), \cos(2\pi x), y)$, et on vérifie que ce plongement convient. De même le plongement

$$(x, y) \mapsto (\sin(2\pi x), \cos(2\pi x), \sin(2\pi y), \cos(2\pi y))$$

de T dans $\mathbb{R}^4$ convient.

4– Supposons que cela soit possible. Soit $x \in T \subset \mathbb{R}^3$. Alors il existe un voisinage U de x dans T et un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ainsiqu'un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ respectant les produits scalaires euclidiens. Par la question 1 (Theorema Egregium), la courbure de Gauss de T en x est nulle. Comme x est arbitraire, cela contredit la question 2 de l'exercice 3.

5– Non : on peut par exemple prendre pour U et V une portion de plan et une portion de cylindre, et pour φ un difféomorphisme induit par le plongement de la question 3. L'application φ respecte les produits scalaires par la question 3, mais n'est pas induit par une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$ car elle n'envoie pas le plan affine engendré par U sur un plan affine.

6– Non : on peut prendre pour U et V deux plans, et prendre pour $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme arbitraire qui n'est pas une isométrie affine. φ préserve bien les courbures de Gauss (qui sont identiquement nulles), mais pas les produits scalaires euclidiens.