

Géométrie Différentielle, TD 7 du 29 mars 2013

1. Degré d'une application

- 1- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
 - Montrer que f se prolonge en une application $C^\infty \tilde{f} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$.
 - Calculer $\deg(\tilde{f})$.
 - Montrer que f est surjective.
- 2- Soit M une variété à bord compacte orientée de dimension d , et N une variété compacte orientée de dimension $d - 1$.
 - Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ . Montrer que $\deg(f|_{\partial M}) = 0$.
 - En déduire qu'il n'existe pas d'application $f : M \rightarrow \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \text{Id}$.
- 3- Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes ; on suppose que Q est non nul.
 - Montrer que P/Q induit une application $C^\infty f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
 - Calculer $\deg(f)$.

2. Applications de la sphère dans elle-même

- 1- Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.
- 2- Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré non nul, et supposons n pair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.
- 3- Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré nul $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, $f(-x) \neq -f(x)$.
- 4- Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.
- 5- Soit $x \in \mathbb{S}^n$ et $U \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ et une application $C^\infty f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ tels que f réalise un difféomorphisme entre V et $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, et que $f(\mathbb{S}^n \setminus V) = \{x\}$.
- 6- Soit $d \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même.
- 7- Supposons n impair. Soit $d \in \mathbb{Z}$ un entier pair. Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même telle que $f(-x) \neq -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$.

3. Courbure de Gauss

- 1- Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 .

- 2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).
- 3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à \mathbb{S}^2 . Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$.
- 4– Montrer qu'on peut trouver une surface C^∞ compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ difféomorphe à \mathbb{S}^2 qui possède un point de courbure de Gauss nulle.

4. Surfaces à courbure négative

- 1– Soit $T = \{(\cos(v)/\cosh(u), \sin(v)/\cosh(u), u - \tanh(u)), u \in]0, +\infty[, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il s'agit d'une surface C^∞ connexe orientable : la tractricoïde.
- 2– Montrer que la courbure de Gauss de T est constante égale à -1 .
- 3– Montrer que T est d'aire finie, et la calculer.
- 4– Soit $H \subset \mathbb{R}^3$ le fermé d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Montrer qu'il s'agit d'une surface C^∞ connexe orientable : l'hyperboloïde à une nappe.
- 5– Montrer que la courbure de Gauss de H est strictement négative.
- 6– Montrer que H est d'aire infinie.

5. Theorema Egregium

On munit \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 de leurs structures euclidiennes canoniques $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On admettra dans un premier temps la première question, qui est le Theorema Egregium de Gauss.

- 1– Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces C^∞ de courbures de Gauss K_U et K_V , et $\varphi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme. Supposons que pour tout $x \in U$ et pour tout $v, w \in T_x U$, $\langle v, w \rangle = \langle d_x \varphi(v), d_x \varphi(w) \rangle$. Montrer que pour tout $x \in U$, $K_U(x) = K_V(\varphi(x))$.
- 2– Soit $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore et $C = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ le cylindre. Montrer que le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 induit un produit scalaire canonique sur les espaces tangents en chaque point de T et C .
- 3– Montrer qu'il est possible de plonger C dans \mathbb{R}^3 (resp. T dans \mathbb{R}^4) de sorte qu'en tout point $x \in C$ (resp. $x \in T$), le produit scalaire canonique sur $T_x C$ (resp. $T_x T$) coïncide avec celui induit par \mathbb{R}^3 (resp. \mathbb{R}^4).
- 4– Montrer qu'il est impossible de plonger T dans \mathbb{R}^3 de sorte qu'en tout point $x \in T$, le produit scalaire canonique sur $T_x T$ coïncide avec celui induit par \mathbb{R}^3 .
- 5– Dans la question 1, φ est-il nécessairement induit par une isométrie affine de \mathbb{R}^3 ?
- 6– Le réciproque de la question 1 est-elle vraie? Plus précisément, en reprenant les notations de la question 1, si φ préserve la courbure de Gauss, φ préserve-t-il nécessairement le produit scalaire euclidien?